Maturità professionale - Cantone Ticino

Esami di maturità professionale
Indirizzo creazione e arte

Sessione 7 giugno 2018

Matematica fondamentale

(secondo il PQ MP 2012)

Dati personali

Istituto scolastico: Centro scolastico per le industrie artistiche

Nome e cognome: ....

Classe: 3MP1Aa / MP2

Disposizioni generali

- La durata dell'esame è di **120 minuti.**
- È ammesso l'uso della calcolatrice non grafica, senza connessione in rete. L'uso del cellulare come calcolatrice non è consentito.
- È permesso consultare il formulario senza esercizi risolti.
- Non sono ammessi scambi di materiale (penne, gomme, righe, calcolatrice, ecc.).
- Risolvere gli esercizi in modo chiaro e comprensibile, supportati dai relativi calcoli o ragionamenti.
- La Direttiva della DFP definisce la scala delle note.

Esercizio	1	2	3	4	5	Totale
Punti massimi	14	10	11	8	7	50
Punti ottenuti						
					NOTA	

Esercizio 1 (14 punti)

A. Potenze

a) Esprimere il valore della seguente espressione sotto forma di un’unica potenza utilizzando le proprietà delle potenze:

$$\frac{2^{800}\cdot 3^{500}\cdot 5^{300}}{\left(2^2\cdot 3\cdot 5\right)^{400}}=$$ (3 punti)

b) Calcolare e semplificare il più possibile la seguente espressione utilizzando le proprietà delle potenze:

$$\left[a^{-6}\cdot(5a-4a)^5\right]^2-\left[a^{-1}\cdot a^4 : a^2\right]^{-2}=$$ (3 punti)

B. Radicali

Calcolare, semplificare il più possibile e razionalizzare (se necessario) le seguenti espressioni **senza calcolatrice, mostrando i passaggi**:

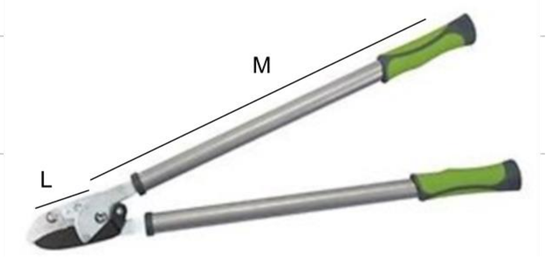
a) $\left(3\sqrt{a+b}+5\sqrt{b}\right)\cdot\left(3\sqrt{a+b}-5\sqrt{b}\right)=$ (2 punti)

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=$ (2 punti)

C. Algebra

a) Abbiamo a disposizione una tavola in legno lunga 5,20 m e larga 32 cm. Se possiamo utilizzare solo 1,20 m^2 di quella tavola, qual è lo scarto in %? (2 punti)

b) Quando si taglia un oggetto con una forbice, si esercita una forza (S), mentre l'oggetto che si vuole tagliare oppone una resistenza (T).
La formula $S = \frac{L \cdot T}{M}$ permette di calcolare la forza che si esercita con una forbice, tenendo conto di due elementi: la distanza (L) tra il perno fisso intorno a cui si muovono le lame e il punto in cui viene opposta la resistenza al taglio, e la distanza (M) tra l'impugnatura e il perno fisso.
La forbice nella foto viene utilizzata per potare gli alberi.



Quale fra le seguenti formule descrive meglio una forbice come quella in fotografia? Giustificare la risposta.

i) $S = \frac{7 \cdot T}{1}$ ii) $S = \frac{1 \cdot T}{7}$ iii) $S = \frac{2 \cdot T}{4}$ iv) $S = \frac{4 \cdot T}{2}$

(2 punti)

Esercizio 2 (10 punti)

Un sito di riservazione di hotel registra le recensioni dei propri clienti chiedendo loro di esprimere la propria opinione online, tramite dei punteggi, in modo che gli altri potenziali clienti possano farsi un'idea dell'hotel da riservare. I punteggi attribuiti vanno da 1 a 5 (da 1 stella a 5 stelle) col seguente significato:

5	*****	Eccellente
4	****	Molto buono
3	***	Nella media
2	**	Scarso
1	*	Pessimo

Nella tabella successiva sono indicate le 80 valutazioni espresse dai clienti per un determinato hotel:

2	4	3	3	5	5	4	3
5	5	4	2	3	4	4	5
3	3	3	4	1	1	2	4
2	2	3	4	5	4	4	4
3	3	2	5	4	4	5	4
3	5	2	4	5	5	5	3
4	4	4	5	5	3	5	3
3	5	3	3	4	2	4	3
5	2	3	3	4	3	3	1
5	4	4	5	3	4	2	4

a) Completare la tabella sul fascicolo delle soluzioni ed arrotondare le frequenze relative ad una cifra decimale. (4 punti)

b) Calcolare gli indici sul fascicolo delle soluzioni ed arrotondare la media a due cifre decimali. (4 punti)

c) Completare il grafico delle frequenze relative % sul fascicolo delle soluzioni. (2 punti)

Esercizio 3 (11 punti)

L'autonoleggio CityCar propone le seguenti 3 tariffe:

Tariffa A: una quota fissa di 10 CHF più 15 cts. per ogni km di percorrenza

Tariffa B: una quota fissa di 15 CHF più 10 cts. per ogni km di percorrenza

Tariffa C: la tariffa è data dalla seguente funzione di secondo grado:

$$C(x) = 0{,}005 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot x + 12$$

Arrotondare tutti i risultati al secondo decimale.

a) Scrivere le leggi delle funzioni $A(x)$ e $B(x)$ delle prime due varianti che permettono di calcolare la spesa in funzione dei km percorsi. (2 punti)

b) Rappresentare graficamente le funzioni $A(x)$ e $B(x)$ sullo stesso piano cartesiano. La funzione $C(x)$ è già tracciata sul grafico. (2 punti)

c) Calcolare algebricamente il costo con la Tariffa A se devo percorrere 60 km. (2 punti)

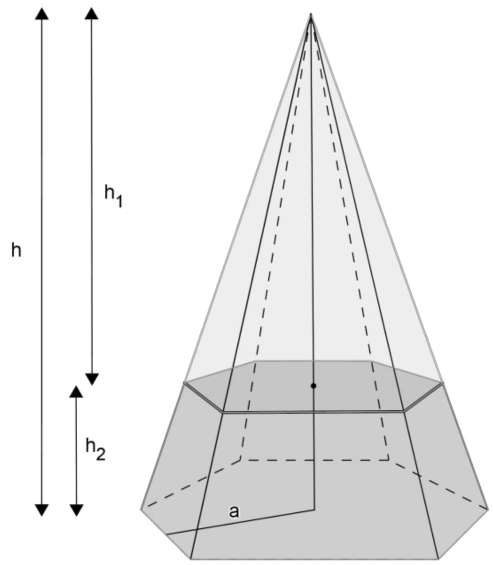
d) Calcolare algebricamente quanti km sono stati percorsi con la Tariffa B se si è speso 23 CHF. (2 punti)

e) Per quali valori (km di percorrenza) la Tariffa A equivale alla Tariffa C? (2 punti)

f) Osservando il grafico determinare quale offerta è più conveniente per quali tragitti (espressi come intervalli). (1 punto)

Esercizio 4 (8 punti)

Una candela a forma di piramide con la base esagonale regolare è stata realizzata con due tipi di cera di colore diverso, uno più chiaro e uno più scuro, sovrapposti uno all'altro come nella figura.
L'apotema *a* dell'esagono alla base misura 8 cm, e si sa che sono stati necessari 739 ml di cera chiara, così come 739 ml di cera scura.



Calcolare, arrotondando i risultati al secondo decimale:

a) l'area dell'esagono alla base della piramide in cm^2. (2 punti)

b) il volume della candela in cm^3. [NB: 1 dm^3 = 1 litro] (1 punto)

c) l'altezza h della candela in cm. (2 punti)

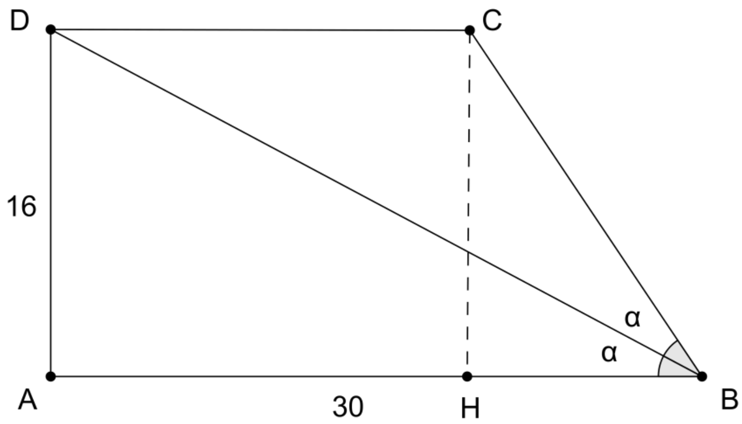
Nel caso non si fosse trovato il risultato della domanda (c) utilizzare in seguito: $h = 20\ cm$.

d) l'altezza h_1 dello strato superiore di cera in cm. (2 punti)

e) l'altezza h_2 dello strato inferiore di cera in cm. (1 punto)

Esercizio 5 (7 punti)

In un trapezio rettangolo la base maggiore misura 30 cm e l'altezza 16 cm. Si sa che la diagonale maggiore è bisettrice dell'angolo formato dalla base maggiore e dal lato obliquo.



Calcolare:

a) la misura della diagonale BD. (1 punto)

b) la misura dell'angolo α. (3 punti)

Nel caso non si fosse trovato il risultato della domanda (b) utilizzare in seguito: $\alpha = 25°$

c) l'area del trapezio ABCD. (3 punti)

Prodotti notevoli

$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ $\quad$ $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$

$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ $\quad$ $(A-B)^3 = A^3- 3A^2B+3AB^2 - B^3$

$(A+B)(A-B) = A^2-B^2$ $\quad$ $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2AC$

$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$ $\quad$ $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

Potenze e radicali

$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ $\quad$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad$ $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$ $\quad$ $(a.b)^n = a^n.b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\quad$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ $\quad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Formula risolutiva delle equazioni di 2° grado:

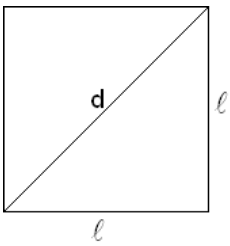
$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e vale: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

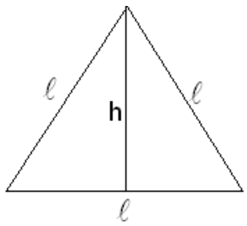
inoltre se $s = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ e $p = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, allora vale: $x^2 - sx + p = 0$

Formule notevoli del quadrato e del triangolo equilatero

$d = \ell\sqrt{2}$ $\quad$ $A = \ell^2$

$\ell = d\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $A = \dfrac{d^2}{2}$

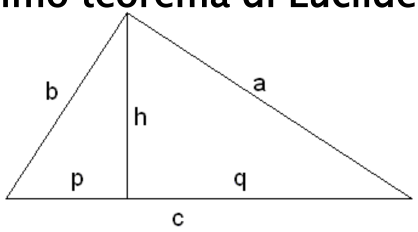




$h = \ell\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $A = \ell^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\ell = h\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $A = h^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Primo teorema di Euclide: *in un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso.*

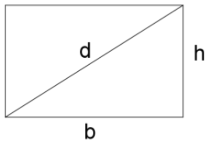


$\boxed{a^2 = q\cdot c}$ $\quad$ $\boxed{b^2 = p\cdot c}$

Secondo teorema di Euclide: *in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa*.

$\boxed{h^2 = p\cdot q}$

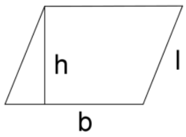
Rettangolo



$P=2(b+h)$

$A=b.h$

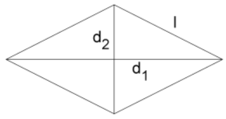
Romboide



$P=2(b+l)$

$A=b.h$

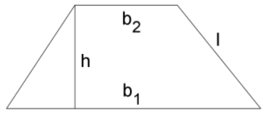
Rombo



$A=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

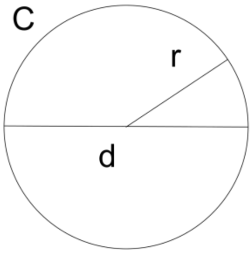
$A=l.h$

Trapezio



$A=\frac{(b_1+b_2)\cdot h}{2}$

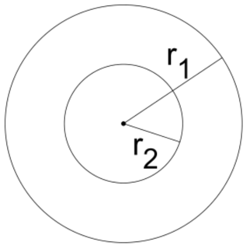
Cerchio



$C=2.r.\pi$

$A=r^2.\pi$

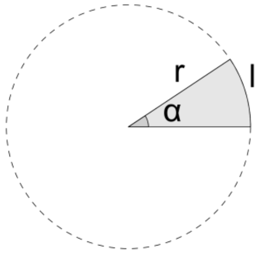
Corona circolare



$A=r_1^2.\pi - r_2^2.\pi =$

$= \pi.(r_1^2 - r_2^2)$

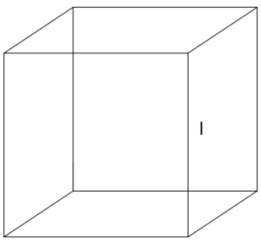
Settore circolare



$l=\frac{2 \cdot r \cdot \pi}{360} \cdot \alpha$

$A=\frac{r^2 \cdot \pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r \cdot l}{2}$

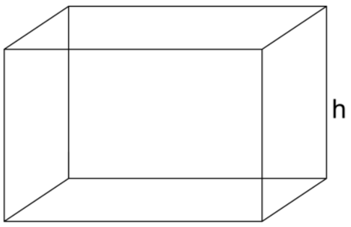
Cubo



$A=6.l^2$

$V=l^3$

Parallelepipedo rettangolo

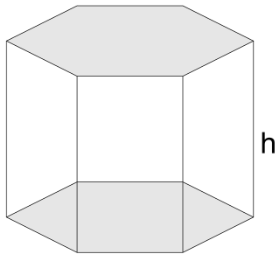


$A_{lat}=P_b.h$

$A_{tot}=2.A_{base}+A_{lat}$

$V=A_{base}.h$

Prisma retto

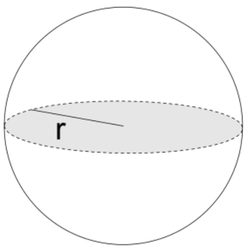


$A_{lat}=P_b.h$

$A_{tot}=2.A_{base}+A_{lat}$

$V=A_{base}.h$

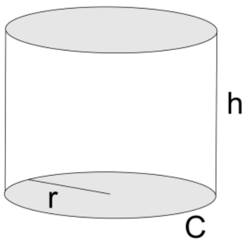
Sfera



$A_{tot}=4.\pi.r^2$

$V=\frac{4}{3}.\pi.r^3$

Cilindro

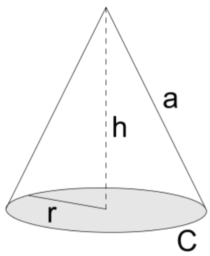


$A_{lat}=C.h$

$A_{tot}=2.A_{base}+A_{lat}$

$V=A_{base}.h$

Cono

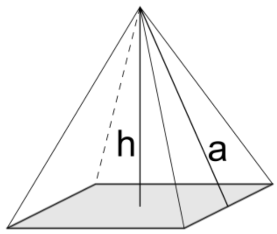


$A_{lat}=\frac{C \cdot a}{2}=\pi.r.a$

$A_{tot}=A_{base}+A_{lat}$

$V=\frac{A_{base} \cdot h}{3}$

Piramide retta



$A_{lat}=\frac{P_{base} \cdot a}{2}$

$A_{tot}=A_{base}+A_{lat}$

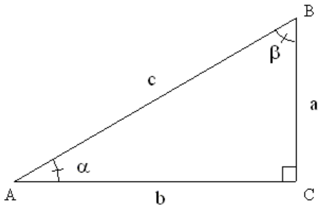
$V=\frac{A_{base} \cdot h}{3}$

Triangolo rettangolo

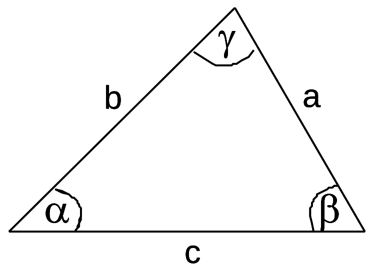
$$\text{sen} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} \qquad \text{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\cos = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{sen}\beta$$

$$\text{tg} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$$



Triangolo qualsiasi



Teorema del seno

In un triangolo qualsiasi il rapporto tra un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante. $\boxed{\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}}$

Teorema del coseno o di Carnot

In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo che essi formano.

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$ $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$ $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

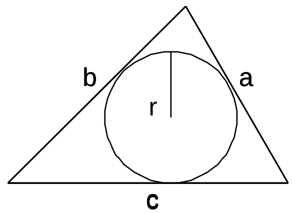
Formula di Erone: si utilizza per calcolare l'area di un triangolo qualsiasi:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dove a,b e c sono i lati del triangolo e $s = \frac{a+b+c}{2}$ il semiperimetro.

Circonferenza inscritta in un triangolo qualsiasi:

$A = s.r \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

dove a,b e c sono i lati del triangolo e $s = \frac{a+b+c}{2}$ il semiperimetro**.**



Area del triangolo qualsiasi:

$A = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\gamma \qquad A = \frac{1}{2}ac \cdot \text{sen}\beta \qquad A = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}\alpha$

Formula di Eulero: per l'intera classe dei poliedri convessi (poliedri che non presentano "buchi" o "manici") vale l'uguaglianza:

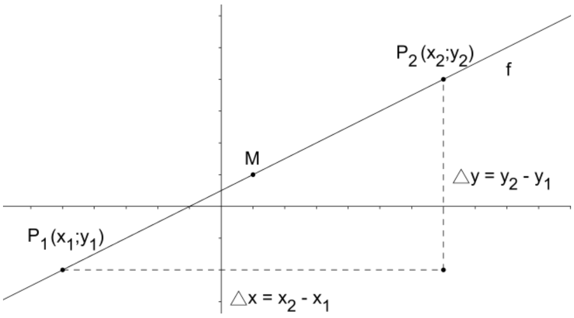
F – S + V = 2 V=vertici, S=spigoli, F=facce

Funzione affine: $y = ax + b$

La **pendenza a** di una retta $y=ax+b$ è definita con il rapporto $\boxed{a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$

Due rette **parallele** hanno la stessa pendenza;

la **pendenza** di una retta g **perpendicolare** alla retta f ($g \perp f$) è: $\boxed{a_g = -\frac{1}{a_f}}$



Distanza tra due punti P_1 e P_2:

$$d_{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Punto medio tra P_1 e P_2:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Parabola: $y = ax^2 + bx + c$

coordinate del **vertice**: $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)}$, del **fuoco**: $\boxed{F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)}$, dell'**asse**: $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$,

e equazione della **direttrice**: $\boxed{y=-\frac{1+\Delta}{4a}}$ della parabola, dove $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$= discriminante.