Esami di maturità professionale
Indirizzo tecnica, architettura e scienze della vita

Sessione 14 giugno 2018

Matematica specifica

(secondo il PQ MP 2012)

Soluzione dell'esame:
Matematica specifica,
con strumenti ausiliari

Esercizio 1 (7 punti)

a) $Im_f = [-4; 1]$ (2 punti)

b) $-\sqrt{x-4} + 1 = -2$
$\Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 3$
$\Leftrightarrow x = 13$

Le coordinate del punto d'intersezione sono $I(13; 2)$ (2 punti)

c)
$y = -\sqrt{x-4} + 1$
$\sqrt{x-4} = 1 - y$
$\Leftrightarrow x = (1-y)^2 + 4$

Dunque:

$f^{-1}: [-4; 1] \longrightarrow [4; 29], \;\; x \longmapsto (1-x)^2 + 4$ (2 punti)

d)

$h\,(x) = f(x+4)$, Quindi: $x + 4$ deve appartenere a $[4; 29]$, dunque:

$D_h = [0; 25]$ (1 punto)

SOLUZIONI

Esercizio 2 (7 punti)

a) Le intersezioni sono

$I_y(0;0)$; $I_{x1}(3;0)$; $I_{x2}(-3;0)$ (2 punti)

b) $f(2) = h(2) \Leftrightarrow -20 = -8(2-b) \Leftrightarrow -b = \frac{5}{2} - 2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$ (2 punti)

c) Dalla risposta precedente si ha che $h(2) = -20 < 0$, inoltre si sa che -$\frac{1}{2}$,1 e 3 sono gli zeri semplici di h. Per cui il segno di h nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2};1\right[$ non varia ed è positivo.

(1 punto)

d) $\begin{cases} y = 2x^3 - 18x \\ y = 8(x^2 - 4x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x(x+3)(x-3) \\ y = 8(x-3)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$$2x(x+3)(x-3) - 8(x-3)(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[2x(x+3) - 8(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2 + 6x - 8x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(-6x^2 + 10x + 4) = 0$$

Dunque $x_1 = 3$ e visto che f(2)=h(2), si ha che $x_2 = 2$. Con Vieta si ottiene:

$2 \cdot x_3 = \frac{4}{-6}$, dunque $x_3 = -\frac{1}{3}$

Quindi $I_1(3\,;0)$, $I_2(2\,;-20)$, $I_3\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{160}{27}\right)$ (2 punti)

Esercizio 3 (7 punti)

a) $\boldsymbol{N_B(0)} = 100 \cdot 2^0 = \mathbf{100}$ **batteri** (1 punto)

b) Se la popolazione è 100 volte maggiore di quella iniziale è diventata di 10’000:

$$10'000 = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow 100 = 2^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow 2 = \frac{t}{3} log(2) \Leftrightarrow t = \frac{6}{log(2)}$$

$\boldsymbol{t = 19,93\ h}$ (2 punti)

c) Posto t=tempo a partire da t_1=0 h

$$N_{B1}(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}; \quad N_{B2}(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t-3}{3}};$$

Risulta:

$$N_{TOT}(t) = N_{B1}(t) + N_{B2}(t)$$

$$N_{TOT}(6) = 100 \cdot 2^{\frac{6}{3}} + 100 \cdot 2^{\frac{6-3}{3}} = \mathbf{600} \text{ batteri}$$ (2 punti)

d) La popolazione totale raddoppia anch’essa ogni tre ore. Dopo 6 ore la popolazione è di 600 batteri dunque sarà di 1’200 batteri 3 ore più tardi, quindi complessivamente dopo 9 ore.

(2 punti)

Esercizio 4 (7 punti)

a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ ||AC|| = $\sqrt{109}$ (2 punti)

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ ||BC|| = $\sqrt{120}$

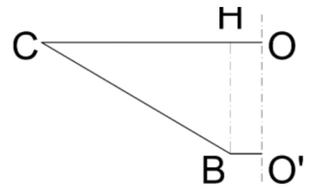
A è più vicino

b) $\gamma = arcos(\frac{-6+80+24}{\sqrt{109}\sqrt{120}}) \cong 31.03°$ (2 punti)

c) $A = \frac{1}{2}\sqrt{109}\sqrt{120}sin(31.03) \cong 29.48$ (2 punti)

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ (1 punto)

Esercizio 5 (7 punti)



a) $CO = \frac{32.0}{2} = 16.0\ m \qquad BO' = 1.5m \ \rightarrow CH = 16.0 - 1.5 = 14.5\ m$

$\boldsymbol{h} = 14.5 \cdot \tan(30°) = \mathbf{8.37}\ \boldsymbol{m}$ (1 punto)

b) Calcolo la superficie laterale e del cerchio superiore:

Cilindro inferiore: $S_{L1} = 2 \cdot \pi \cdot 1.5 \cdot 24.0 = 226.19\ m^2$

Calcolo BC: $BC = \frac{14.5}{\cos(30°)} = 16.74\ m$

Tronco di cono: $S_{L2} = \pi \cdot (1.5 + 16.0) \cdot 16.74 = 920.33\ m^2$

Cilindro superiore: $S_{L3} = 2 \cdot \pi \cdot 16.0 \cdot 6.0 = 603.19\ m^2$

$\boldsymbol{S_{lat}} = 226.19 + 920.33 + 603.19 = \mathbf{1749.71}\ \boldsymbol{m^2}$

Copertura circolare: $\boldsymbol{S_{sup}} = \pi \cdot 16.0^2 = \mathbf{804.25}\ \boldsymbol{m^2}$ (2 punti)

c) Calcolo volume massimo:

Cilindro inferiore: $V_1 = \pi \cdot 1.5^2 \cdot 24.0 = 169.65\ m^3$

Tronco di cono: $V_2 = \frac{\pi \cdot 8.37}{3}(1.5^2 + 16.0^2 + 1.5 \cdot 16.0) = 2473.93\ m^3$

Cilindro superiore: $V_3 = \pi \cdot 16.0^2 \cdot 6.0 = 4825.49\ m^3$

$\boldsymbol{V_{totale}} = 169.65 + 2468.02 + 4825.49 = \mathbf{7469.07}\ \boldsymbol{m^3}$ (2 punti)

d) Altezza dell'acqua se sono presenti 5000 m^3:

Il livello dell'acqua ha raggiunto il cilindro superiore:

$5000 > 169.65 + 2473.93 = 2643.58$

Il cilindro superiore è riempito per un volume pari a

$V_{sup} = 5000 - 2643.58 = 2356.42\ m^3$

$2356.42 = \pi \cdot 16.0^2 \cdot h_{sup} \ \rightarrow \ h_{sup} = \frac{2356.42}{804.25} = 2.93\ m$

$\boldsymbol{x} = 24.0 + 8.37 + 2.93 = \mathbf{35.30}\ \boldsymbol{m}$ (2 punti)