Maturità professionale - Cantone Ticino

Esami di maturità professionale
Indirizzo tecnica, architettura e scienze della vita

Sessione 15 giugno 2021

Matematica specifica

(secondo il PQ MP 2012)

Soluzione dell'esame:

Matematica specifica,

con strumenti ausiliari

Esercizio 6 (7 punti)

a) $2x + 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D_f = [-1; +\infty[}$ (1 punto)

b) $\begin{cases} y = 3 - \sqrt{2x+2} \\ y = 6 - x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 3 - \sqrt{2x+2} = 6 - x$

$$\sqrt{2x+2} = x - 3 \quad (*)$$

$$\left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = (x-3)^2$$

$$2x + 2 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$x = 7$ verifica in (*): $4 = 4$ ok $\quad \Longrightarrow \quad y = 6 - 7 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I(7; -1)}$ (2 punti)

$x = 1$ verifica in (*): $2 \neq -2$ no

c) $3 - \sqrt{2x+2} = 2$

$\sqrt{2x+2} = 1$ (**)

$2x + 2 = 1$

$x = -\frac{1}{2}$ verifica in (**) ok $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Controimmagine di 2: } -\frac{1}{2}}$

$3 - \sqrt{2x+2} = 4$

$\sqrt{2x+2} = -1$ impossibile $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Controimmagine di 4: } \emptyset}$ (1 punto)

d) $y = 3 - \sqrt{2x+2}$

$\sqrt{2x+2} = 3 - y$

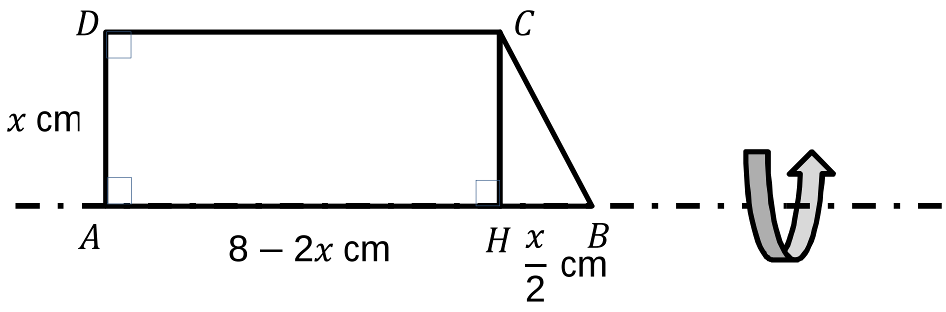
$\left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = (3-y)^2$

$2x + 2 = (3-y)^2$

$x = \frac{(3-y)^2 - 2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}}$ (2 punti)

e) $\boxed{D_{f^{-1}} =]-\infty; 3]}$ dato che $D_{f^{-1}} = Im_f$ (1 punto)

Esercizio 7 (7 punti)



a) $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x}{2} > 0 \\ 8-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in \,]0 \text{ cm} ; 4 \text{ cm}[}$ (1 punto)

b) $V = 3^2 \cdot \pi \cdot (8-2\cdot 3) + \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{45}{2} \cdot \pi \text{ cm}^3}$ (2 punti)

c) $V(x) = x^2 \cdot \pi \cdot (8-2x) + \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{2} = \boxed{-\frac{11}{6} \cdot \pi \cdot x^3 + 8 \cdot \pi \cdot x^2 \text{ cm}^3}$ (2 punti)

d) Dal grafico si può leggere il valore di x che massimizza il volume: $\boxed{x \cong 2.9cm}$

(2 punti)

Esercizio 8 (7 punti)

a) $V(20) = 20 \cdot 1{,}3^{20} \cong \boxed{3801 \text{ visualizzazioni}}$ (1 punto)

b) Dall'equazione della funzione si legge immediatamente la percentuale di crescita giornaliera delle visualizzazioni: $p = 0.3 = \boxed{30\%}$

Algebricamente:

$p = \frac{V(1)-V(0)}{V(0)} = \frac{20\cdot 1.3^1 - 20\cdot 1.3^0}{20\cdot 1.3^0} = \frac{6}{20} = 0.3 = \boxed{30\%}$ (1 punto)

c) $V(t) = 1000 \cdot V(0) \iff 20 \cdot 1.3^t = 1000 \cdot 20 \iff 20 \cdot 1.3^t = 1000 \cdot 20$

$\iff 1.3^t = 1000 \iff t = \frac{\log(1000)}{\log(1.3)} \cong \boxed{26.33 \text{ giorni}}$ (2 punti)

d) $6200 = C \cdot 1{,}3^{2\cdot 14}; \; C = \frac{6200}{1550.3} \cong 4$ $\boxed{C = 4}$ (1 punto)

e) $60000 = 20 \cdot 1.3^t + 4 \cdot 1.3^{2t}$ $\quad posto\ z = 1.3^t \rightarrow 4z^2 + 20z - 60000 = 0$

$$z_{1-2} = \frac{-20 \pm 980}{8} \rightarrow z_1 = 120 \,; \; z_2 = -125$$

$$z_1 = 1.3^t = 120 \leftrightarrow t = log_{1.3}(120) = 18.25\ giorni$$

$$z_2 = 1.3^t = -125 \leftrightarrow impossibile$$

Dunque dopo $\boxed{18.25 \text{ giorni.}}$ (2 punti)

Esercizio 9 (7 punti)

a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{D(4; -3; 0)}$

(1 punto)

b) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \boxed{E(5; -3; 3)}$$

(1,5 punti)

c) $\boxed{r = \|\overrightarrow{BS}\| = \sqrt{1+4+4} = 3\text{cm}}$

(1 punto)

d) $\|\overrightarrow{CS}\| = 3 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2-z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4 + (2-z)^2} = 3$

$$5 + (2-z)^2 = 9$$

$$(2-z)^2 = 4$$

$$2 - z = \pm 2$$

$z = 0 \Rightarrow \boxed{C(2; 1; 0)}$ $\quad z = 4 \Rightarrow B\,(2; 1; 4)$

(1,5 punti)

e) Calcolare l'angolo $\sigma = \widehat{ASB}$

$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\|\overrightarrow{SA}\| = r = 3$ e $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\|\overrightarrow{SB}\| = r = 3$

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 + 4 - 2 = 4$$

$$\sigma = arcos\left(\frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{\|\overrightarrow{SA}\| \cdot \|\overrightarrow{SB}\|}\right) = arcos\left(\frac{4}{9}\right) = 63{,}61°$$

$$\boxed{arcoAB = \sigma \cdot r \cdot \frac{\pi}{180°} = 63.61° \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{180°} = 3{,}33 \text{ cm}}$$

(2 punti)

Esercizio 10 (7 punti)

a) $\boxed{\alpha} = 2 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{60}{300}\right) = \boxed{22{,}62°}$ (1,5 punti)

b)

$a = \sqrt[2]{(60 \cdot \sin(60°))^2 + 300^2} = 304{,}47 \text{ cm}$

$\boxed{\mathbf{A_{lat}}} = \frac{6 \cdot 60 \cdot 304{,}47}{2} = \cdots = \boxed{548{,}04 \text{ dm}^2}$ (2 punti)

c)

Raggio inferiore: $R = \frac{220}{2} = 110 \text{ cm}$, Raggio superiore: $r = \frac{FC}{2} = 85 \text{ cm}$

$V_{\text{tronco di cono}} = \frac{\pi \cdot 85}{3} \cdot (110^2 + 85^2 + 110 \cdot 85) = \cdots = 2{,}55 \text{ m}^3$

$V_{\text{cilindro interno}} = \pi \cdot 60^2 \cdot 85 = \cdots = 0{,}96 \text{ m}^3$

$\boxed{\mathbf{V_1}} = 2{,}55 - 0{,}96 = \boxed{1{,}59 \text{ m}^3}$ (2 punti)

d) (1.5 punti)

$\boxed{\mathbf{V_2}} = \frac{1{,}59 \cdot 10^6}{5^3} = \boxed{12720{,}00 \text{ cm}^3}$