Esami di maturità professionale
Indirizzo tecnica, architettura e scienze della vita

Sessione 15 giugno 2021

Matematica specifica

(secondo il PQ MP 2012)

Soluzione dell'esame:
Matematica specifica,
senza strumenti ausiliari

SOLUZIONI

Esercizio 1 (7 punti)

a)

$$3^3 \cdot (3^{2m})^2 - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot 81^{m+1} =$$

$$3^3 \cdot 3^{4m} - 3^{-\frac{3}{3}} \cdot (3^4)^{m+1} = 3^{4m+3} - 3^{-1} \cdot 3^{4m+4} =$$

$$= 3^{4m+3} - 3^{4m+3} = \boxed{0}$$

(2 punti)

b)

i) $\log_5(2b) - 2 \cdot \log_5(b) = -1 \iff \log_5\left(\frac{2b}{b^2}\right) = -1$

$\iff \log_5\left(\frac{2}{b}\right) = -1 \iff 5^{-1} = \frac{2}{b} \iff \frac{b}{2} = 5 \iff \boxed{b = 10}$

ii) $\log_2(\log_{10}(x)) = \log_9(81) \iff \log_2(\log_{10}(x)) = 2 \iff$

$2^2 = \log_{10}(x) \iff \boxed{x = 10^4 = 10000}$

(2.5 punti)

c)

$$\begin{cases} 20 = A \cdot 4^{\frac{b}{3}} \\ 10 = A \cdot 4^{\frac{b}{6}} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{20}{4^{\frac{b}{3}}} = A \\ 10 = \frac{20}{4^{\frac{b}{3}}} \cdot 4^{\frac{b}{6}} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{20}{4^{\frac{b}{3}}} = A \\ 10 = 20 \cdot 4^{\frac{b}{6}-\frac{b}{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{20}{4^{\frac{b}{3}}} = A \\ 10 = 20 \cdot 4^{-\frac{b}{6}} \end{cases}$$

$10 = 20 \cdot 4^{-\frac{b}{6}} \iff \frac{1}{2} = (2^2)^{-\frac{b}{6}} \iff 2^{-1} = 2^{-\frac{b}{3}} \iff -1 = -\frac{b}{3} \iff \boxed{b = 3}$;

$\boxed{A = \frac{20}{4^1} = 5}$

(2.5 punti)

Esercizio 2 (7 punti)

a) $P(2;25)$ $\quad f(2) = 16 - 4 + 8 + 15 = 35 \neq 25$ $\quad \boxed{P \notin f}$ (1 punto)

b) $\frac{1}{2} \cdot x \cdot (2x+3) \cdot (x^2 - 2x + 5) = 0$. Siccome il trinomio $x^2 - 2x + 5$ non è fattorizzabile ($\Delta = -16 < 0$), gli zeri sono: $\boxed{Z_f = \left\{-\frac{3}{2};0\right\}}$. (1 punto)

c) f è una funzione polinomiale con $f(2) > 0$ e $Z_f = \left\{-\frac{3}{2};0\right\}$. Visto che entrambi gli zeri sono semplici si ha che: $\boxed{S = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup \left]0;+\infty\right[}$.

(1.5 punti)

Eventuale tabella dei segni:

	$-\frac{3}{2}$		0
$\frac{1}{2}x$	−	−	+
$2x+3$	−	+	+
$x^2 - 2x + 5$	+	+	+
$f(x)$	+	−	+

d) Lo zero -3 ha una molteplicità 2 e lo zero 4 ha una molteplicità 1, quindi:
$g(x) = a \cdot (x+3)^2 \cdot (x-4)$. Visto che il grafico di g passa per $P(2;25)$:
$25 = a \cdot (2+3)^2 \cdot (2-4) \Leftrightarrow 25 = a \cdot 25 \cdot (-2) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\boxed{g(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 \cdot (x-4)}$ (2 punti)

e) $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{15}{2}x = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{15}{2}x + 18$
$x^4 + 3x^2 - 18 = 0$ ponendo $t = x^2$
$t^2 + 3t - 18 = 0$
$(t+6)(t-3) = 0$
$t = x^2 = -6$ impossibile
$t = x^2 = 3 \implies \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$ (1.5 punti)

Esercizio 3 (7 punti)

a) Punto di intersezione con l'asse O_x: $I_x(x\,;\,y)$

- $y = 0$;
- x: $0 = \log_4(2x+2) \;\Leftrightarrow\; 1 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2} = -0.5 \notin D_f$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Nessun punto di intersezione con l'asse } O_x.}$

Punto di intersezione con l'asse O_y: $I_y(x\,;\,y)$

- $x = 0$;
- $y = \log_4(2\cdot 0+2) = \log_4(2) = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{I_y(0\,;\frac{1}{2})}$ (2 punti)

b) $\boxed{Im_f = \left[\frac{1}{2}\,;2\right]}$ (1 punto)

c) $\boxed{D_g = \left]0\,;\,+\infty\right[}$ (1 punto)

d) Punto di intersezione: I

$\log_4(2x+2) = \log_4(x) + \log_4(x+1) \;\Leftrightarrow\; \log_4(2x+2) = \log_4[x(x+1)]$

$\Leftrightarrow\; 2x+2 = x(x+1) \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow\; x_1 = -1\;;\; x_2 = 2$

$x_1 \notin D_f \cap D_g\,,\qquad x_2 \in D_f \cap D_g$

$y_2 = f(2) = \log_4(2\cdot 2+2) = \log_4(6)$

$\Longrightarrow$ $\boxed{I(2\,;\,\log_4(6))}$ (2 punti)

e) $\boxed{\text{Grafico di } f\text{: } C}$ (1 punto)

Esercizio 4 (7 punti)

a)

i) $f(5) = |-2 \cdot 5 + 4| + 2 \cdot 5 - 1 = |-6| + 9 = \boxed{15}$

ii) $f(x) = 7 \Leftrightarrow |-2x + 4| + 2x - 1 = 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 + 2x - 1 & se\ x < 2 \\ -(-2x + 4) + 2x - 1 & se\ x \geq 2 \end{cases} = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 & se\ x < 2 \\ 4x - 5 & se\ x \geq 2 \end{cases} = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 7 & se\ x < 2 \\ 4x = 12 & se\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{3\}}$$

iii) Il grafico corretto è il $\boxed{B}$

(3 punti: 1 punto per item)

b)

$$(3x - 2)^3 - 4 \cdot (3x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 2) \cdot [(3x - 2)^2 - 4] = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 2) \cdot (9x^2 - 12x + 4 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 2) \cdot 3 \cdot x \cdot (3x - 4) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}}$$

(2 punti)

c) $8 - x^2 \leq \frac{16}{x^2}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{-8x^2 + x^4 + 16}{x^2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x^2 - 4)^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

(2 punti)

Esercizio 5 (7 punti)

a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 18 \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 500 \\ -200 \\ 10 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1300 \\ 1600 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\boxed{B(-1300; 1600; 100)}$ (2 punti)

b) $U \in r_{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 200 \\ k \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -200 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 200 = 500 - 100t \\ k = -200 + 100t \\ h = 10 + 5t \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} t = 3 \\ \boxed{k} = -200 + 100t = -200 + 100 \cdot 3 \boxed{= 100} \\ \boxed{h} = 10 + 5t = 10 + 5 \cdot 3 \boxed{= 25} \end{cases}$$

Oppure $\overrightarrow{AU} = \lambda \cdot \vec{s}$ …. (1 punto)

c) $\overrightarrow{UC} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix}$; i due vettori sono perpendicolari se $\boxed{\overrightarrow{UC} \cdot \vec{s} = 0}$

$\begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 5 \end{pmatrix} = -400 + 400 + 0 = 0$ Ok (2 punti)

d) Il punto E è dato dall'intersezione della retta passante per U di direzione $\vec{d}$ e della retta passante per C di direzione $\vec{t}$.

$\overrightarrow{OU} + \mu \cdot \vec{d} = \overrightarrow{OC} + \lambda \cdot \vec{t}$

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 25 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 200 = 600 - 4\lambda \\ 100 = 500 - 4\lambda \\ 25 + \mu = 25 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} \lambda = 100 \\ \lambda = 100 \\ \mu = \lambda = 100 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(200; 100; 125)}$ (2 punti)