Maturità professionale - Cantone Ticino

Esami di maturità professionale artistica

Sessione 2016

Matematica

Timbro della scuola

Istituto scolastico: Centro Scolastico Industrie Artistiche

Nome e cognome: ………………………………………………

Professione: ………………………………………………

Classe: ………………………………………………

SOLUZIONI

Esercizio	A1	A2	A3	B1	B2	B3	B4	Totale
Punteggio massimo	13	13	13	15	13	17	13	97
Punteggio ottenuto								
							Nota	

La docente responsabile: **Fabrizia Maggi Regli**

Luogo e data dell'esame: **Lugano, 9 giugno 2016**

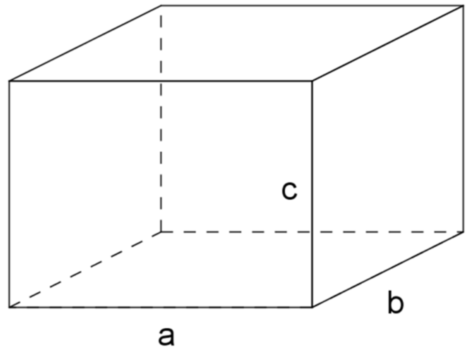
A1. a, b e c sono le dimensioni di un parallelepipedo retto:

$a=\sqrt{3}+1$; $b=2\sqrt{3}+2$ $c=3\sqrt{3}+3$.

L'area della superficie totale del parallelepipedo è $A=m\left(\sqrt{3}+q\right)$

e il volume è $V=k\left(3\sqrt{3}+t\right)$.

Determinare m, q, k e t $\in$IN. [13 pt]



(Il disegno non è in scala.)

Soluzione:

$$A=2ab+2ac+2bc=2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)+2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 3\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)+2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 3\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=$$
$$=4\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2+6\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2+12\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2=22\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2=22\cdot\left(2\sqrt{3}+4\right)=44\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)\quad \text{cm}^2$$

$$V=abc=\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 3\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=6\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^3=6\cdot\left(6\sqrt{3}+10\right)=12\cdot\left(3\sqrt{3}+5\right)\quad \text{cm}^3$$

A2. Calcolare e semplificare il più possibile la seguente espressione algebrica:

$$\left[(p+q)^3+(p-q)^3+6p(p+q)(p-q)-7p^3+1\right]^2-\left(p^3-1\right)^2$$ [13 pt]

Soluzione:

$$\left[(p+q)^3+(p-q)^3+6p(p+q)(p-q)-7p^3+1\right]^2-\left(p^3-1\right)^2=$$
$$=\left[\left(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3\right)+\left(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3\right)+6p\left(p^2-q^2\right)-7p^3+1\right]^2-\left(p^3-1\right)^2=$$
$$=\left[2p^3+6pq^2+6p^3-6pq^2-7p^3+1\right]^2-\left(p^3-1\right)^2=$$
$$=\left(p^3+1\right)^2-\left(p^3-1\right)^2=$$

Var.1: $= \left(p^6 + 2p^3 + 1\right) - \left(p^6 - 2p^3 + 1\right) = 4p^3$

Var.2: $= \left(\left(p^3 + 1\right) + \left(p^3 - 1\right)\right)\left(\left(p^3 + 1\right) - \left(p^3 - 1\right)\right) = 2p^3 \cdot 2 = 4p^3$

A3. Risolvere il seguente sistema a due incognite: [13 pt]

$$\begin{cases} (1-3y)^2 + (2x-3)^2 = 17 \\ 3y - 4x = 1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} (1-3y)^2 + (2x-3)^2 = 17 \\ 3y - 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - 3 \cdot \dfrac{1+4x}{3}\right)^2 + (2x-3)^2 = 17 \\ y = \dfrac{1+4x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-(1+4x))^2 + (2x-3)^2 = 17 \\ y = \dfrac{1+4x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-4x)^2 + (2x-3)^2 = 17 \\ y = \dfrac{1+4x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 17 \\ y = \dfrac{1+4x}{3} \end{cases}$$

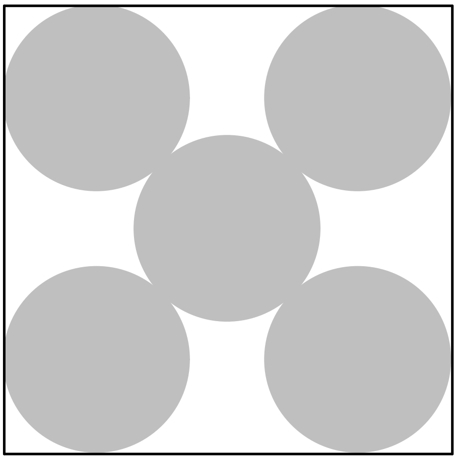
$$\begin{cases} 20x^2 - 12x - 8 = 0 \\ y = \dfrac{1+4x}{3} \end{cases} \qquad \text{ev.} \begin{cases} 5x^2 - 3x - 2 = 0 \\ y = \dfrac{1+4x}{3} \end{cases}$$

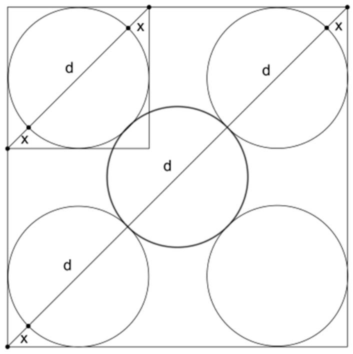
$$\begin{cases} x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 20 \cdot 8}}{40} = \dfrac{12 \pm \sqrt{784}}{40} = \dfrac{12 \pm 28}{40} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{2}{5} \end{array} \right. \\ y = \dfrac{1+4x}{3} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1+4\cdot 1}{3} = \dfrac{5}{3} = y_1 \\ \dfrac{1 + 4 \cdot \frac{-2}{5}}{3} = \dfrac{\frac{5}{5} - \frac{8}{5}}{3} = -\dfrac{1}{5} = y_2 \end{array} \right. \end{cases} \qquad \text{ev.}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot 5\cdot 2}}{10} = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{10} = \dfrac{3 \pm 7}{10} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{2}{5} \end{array} \right. \\ y = \dfrac{1+4x}{3} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1+4\cdot 1}{3} = \dfrac{5}{3} = y_1 \\ \dfrac{1+4\cdot\dfrac{-2}{5}}{3} = \dfrac{\dfrac{5}{5}-\dfrac{8}{5}}{3} = -\dfrac{1}{5} = y_2 \end{array} \right. \end{cases} \quad ; \quad S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5} \right), \left(1; \frac{5}{3} \right) \right\}$$

B1. Da una sfoglia di pasta di forma quadrata di lato 40 cm si ritagliano 5 biscotti rotondi, tutti uguali tra loro, secondo lo schema in figura. Quanto misura il diametro di ciascun biscotto (**valore esatto razionalizzato**)?

[15 pt]



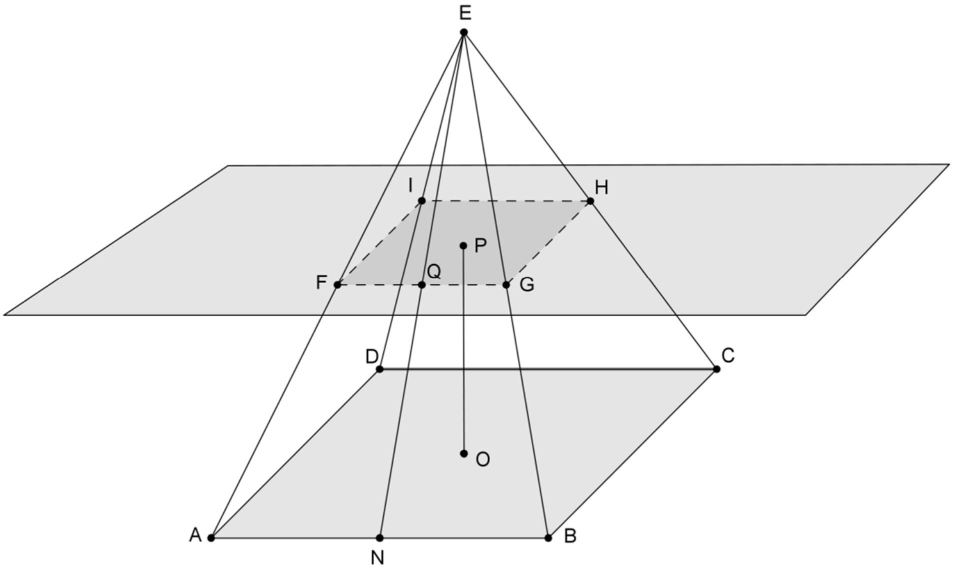


Soluzione:

$$\begin{cases} 40\sqrt{2} = 3d + 2x \\ d\sqrt{2} = d + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40\sqrt{2} = 3d + 2 \cdot \dfrac{d\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \\ x = \dfrac{d\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40\sqrt{2} = 3d + d\sqrt{2} - d \\ x = \dfrac{d\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40\sqrt{2} = d\left(\sqrt{2}+2\right) \\ x = \dfrac{d\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} = \cdots = 40\left(\sqrt{2}-1\right) \\ \text{(ev.)} \qquad x = \dfrac{40\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = 20\left(3-2\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

B2. Una piramide quadrangolare regolare retta ABCDE ha l'apotema ($\overline{EN}$) che misura 75 cm e l'area della sua superficie laterale totale è 13'500 cm^2.
Tale piramide viene sezionata con un piano parallelo alla sua base. L'altezza del tronco di piramide che si ottiene ($\overline{PO}$) è 32 cm.
Calcolare la misura del lato del quadrato di sezione ($\overline{FG}$). [13 pt]

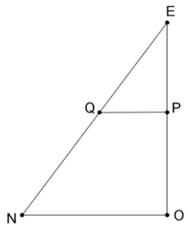


Soluzione:

$$A_{lat} = 13'500$$

$$A_{ABE} = \frac{13'500}{4} = 3'375$$

$$A_{ABE} = \frac{AB \cdot EN}{2} = 3'375 \qquad \Rightarrow \qquad AB = \frac{3'375 \cdot 2}{75} = 90$$



$$NO = \frac{AB}{2} = 45 \,, \qquad EO = \sqrt{EN^2 - NO^2} = \sqrt{75^2 - 45^2} = 60 \,, \qquad EP = 60 - 32 = 28$$

Similitudine: $\dfrac{QP}{NO} = \dfrac{EP}{EO} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{QP}{45} = \dfrac{28}{60} \quad \Rightarrow \quad QP = \dfrac{28 \cdot 45}{60} = 21$

$$FG = 2 \cdot QP = 2 \cdot 21 = 42$$

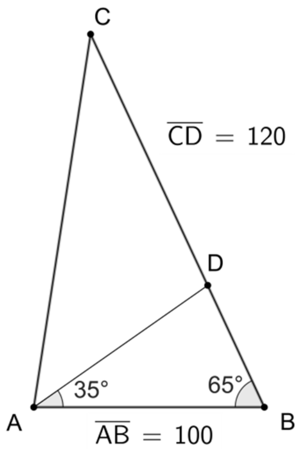
B3. Si consideri un triangolo ABC con $\overline{AB} = 100$ cm, l'angolo $C\hat{B}A = 65°$ e un punto D situato sul lato $\overline{BC}$ in modo che l'angolo $B\hat{A}D = 35°$ e che $\overline{CD} = 120$ cm.

a) Eseguire uno schizzo della situazione.

b) Determinare la misura degli angoli e dei lati del triangolo ACD. [17 pt]

Soluzione:

a)



b) $A\hat{D}B = 180° - 65° - 35° = 80°$

$C\hat{D}A = 180° - 80° = 100°$

$$\frac{100}{\text{sen}80°} = \frac{AD}{\text{sen}65°} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{100 \cdot \text{sen}65°}{\text{sen}80°} \approx 92{,}03$$

$$AC = \sqrt{120^2 + 92{,}03^2 - 2 \cdot 120 \cdot 92{,}03 \cdot \cos 100°} = 163{,}42$$

$$\frac{163{,}42}{\text{sen}100°} = \frac{120}{\text{sen}C\hat{A}D} \quad \Rightarrow \quad C\hat{A}D = \text{sen}^{-1}\left(\frac{120 \cdot \text{sen}100°}{163{,}42}\right) = 46{,}32°$$

$$A\hat{C}D = 180° - 100° - 46{,}32° = 33{,}68°$$

B4. Studiando il prezzo di mercato nel corso degli ultimi anni di una *Ford Shelby GT 350* del 1969, automobile oramai considerata d'epoca, si nota che il suo valore è aumentato di 1'800 CHF ogni anno e oggi (nel 2016) vale 90'800 CHF.
Una *Porsche 911 turbo* del 1990, invece, perde valore: se nel 2000 valeva 86'000 CHF, nel 2009 ne valeva 59'000.

Supponendo che la crescita/diminuzione del valore delle automobili sia lineare, si considerino le funzioni F(x) e P(x) che rappresentano il valore delle due automobili al variare del tempo x in anni (x=0 nell'anno 2000; x=1 nel 2001; ecc.).

a) Determinare le equazioni delle due funzioni F(x) e P(x) e rappresentarle graficamente.
b) Determinare graficamente in quale anno le due automobili hanno lo stesso valore.
c) Determinare quale sarà la differenza del valore delle due automobili nell'anno 2020.

[13 pt]

Soluzione:

a) $F(x) = ax + b$

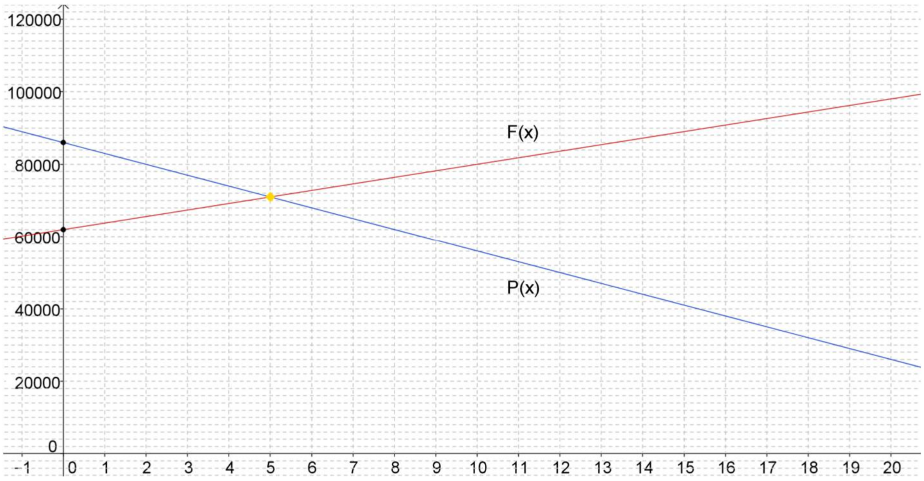
$F(16) = 1'800 \cdot 16 + b = 90'800 \quad \Rightarrow \quad b = 90'800 - 1'800 \cdot 16 = 62'000$

$F(x) = 1'800 \cdot x + 62'000$

$P(x) = ax + b$

$$\begin{cases} P(0) = a \cdot 0 + b = 86'000 \\ P(9) = a \cdot 9 + 86'000 = 59'000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 86'000 \\ a = \frac{59'000 - 86'000}{9} = -3'000 \end{cases}$$

$P(x) = -3'000 \cdot x + 86'000$



b) $x = 5 \quad \Rightarrow$ Hanno lo stesso valore nel 2005.

c) $F(20) = 1'800 \cdot 20 + 62'000 = 98'000$

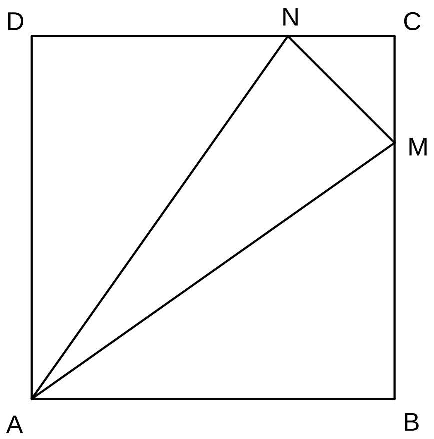
$P(20) = -3'000 \cdot 20 + 86'000 = 26'000$

$F(20) - P(20) = 98'000 - 26'000 = 72'000$

La differenza del valore delle due automobili nell'anno 2020 sarà di 72'000 CHF.

PER LE CREATRICI D'ABBIGLIAMENTO (3MPAa) IN SOSTITUZIONE ALL'ESERCIZIO B4 SULLE FUNZIONI

B4. Nel quadrato ABCD abbiamo le seguenti misure:
AB=1 m, CM=CN e l'area del triangolo AMN = 4/9 m^2.
Calcolare la lunghezza del segmento CM. [13 pt]



Soluzione:

$CM = CN = x$ e $BM = DN = 1 - x$

$$A_{AMN} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{ABM} - A_{MCN} = \frac{4}{9}$$

$$1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot (1-x)}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{4}{9}$$

$$1 - (1-x) - \frac{x^2}{2} = \frac{4}{9}$$

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{4}{9} = 0$$

$$\frac{-9x^2 + 18x - 8}{18} = 0$$

$$9x^2 - 18x + 8 = 0$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 9 \cdot 8}}{2 \cdot 9} = \frac{18 \pm 6}{18} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \text{(n.a.)} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$