

Esami di maturità professionale
Indirizzo tecnica, architettura e scienze della vita

Sessione 15 giugno 2022

Matematica specifica

(secondo il PQ MP 2012)

Soluzione dell'esame:
Matematica specifica,
senza strumenti ausiliari

**Esercizio 1 (7 punti)**

a) $\frac{\sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^{-3}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{a^{\frac{9}{6}}}{a^{-\frac{3}{4}}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} = a^{\frac{9}{6}} : a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} = a^{\frac{18+9-3}{12}} \quad (2 \text{ punti})$

$$= a^{\frac{18+9-3}{12}} = \boxed{a^2}$$

b) $\log_3(b^2) - \log_3(\sqrt[2]{b^3}) = -\frac{1}{2}; \quad \log_3\left(\frac{b^2}{b^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{1}{2}; \quad (2 \text{ punti})$

$$\log_3\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2} \leftrightarrow 3^{-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

c) i) (1 punto)

$$\begin{cases} 6 = p\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + q \\ -1 = p\left(\frac{1}{2}\right)^2 + q \end{cases}; \quad \begin{cases} 6 = 2p + q \\ -1 = p\left(\frac{1}{2}\right)^2 + q \end{cases}; \quad \begin{cases} 6 - 2p = q \\ -1 = \frac{1}{4}p + (6 - 2p) \end{cases}; \quad \begin{cases} 6 = 2p + q \\ -7 = -\frac{7}{4}p \end{cases}$$

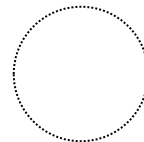
$$\boxed{\begin{cases} q = -2 \\ p = 4 \end{cases}}$$

ii) $f(-3) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - 2 = 4 \cdot 8 - 2 = \boxed{30} \quad (1 \text{ punto})$

iii) Ricavo il valore di x per $y = -\frac{31}{16}$ della $f(x)$: (1 punto)

$$-\frac{31}{16} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2; \quad \frac{1}{16} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow x = 6$$

Ne segue che $\boxed{f^{-1}\left(-\frac{31}{16}\right) = 6}$



Esercizio 2 (7 punti)

a) 5° (1 punto)

b) $f(-1) = (-1 + 2)(2 - (-1)^2)(2 + (-1)^2) = 3$ (1 punto)

Dunque $P(-1; 3)$

c) $f(x) = (x + 2)(4 - x^4) = -x^5 - 2x^4 + 4x + 8$ (1 punto)

$$f(-x) = (-x + 2)(2 - (-x)^2)(2 + (-x)^2) = (-x + 2)(2 - x^2)(2 + x^2)$$

$$(-x + 2)(4 - x^4) = x^5 - 2x^4 - 4x + 8$$

$f(-x) \neq f(x)$ quindi **non pari**

$f(-x) \neq -f(x)$ quindi **non dispari**

d) $0 = (x + 2)(2 - x^2)(2 + x^2) \Rightarrow$ ZERI: $x = -2 ; x = \pm\sqrt{2}$ (1 punto)

e) Siccome $f(-3/2) < 0$ e non ci sono zeri nell'intervallo indicato il segno di f è negativo. Oppure:

	-2	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	
$x + 2$	-	+	+	+	+	+
$2 - x^2$	-	-	+	+	+	-
$2 + x^2$	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	<u>+</u>	+	-

$f < 0$ nell'intervallo $x \in]-2 ; -\sqrt{2}[$

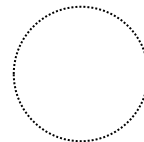
(1 punto)

f) $a < 0$, molteplicità 3 in $x = 0$ e molteplicità 1 in $x = -2$ e $x = 2$: (2 punti)

Grafico di g : C

$a < 0$, molteplicità 1 in $x = 0$ e molteplicità 2 in $x = -2$ e $x = 2$:

Grafico di h : A

**Esercizio 3 (7 punti)**

a) $f\left(-\frac{44}{15}\right) = \log_5\left(3 \cdot \left(-\frac{44}{15}\right) + 9\right) = \log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ (1 punto)

b) $0 = \log_5(3x + 9) \Leftrightarrow 1 = 3x + 9 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$ (1 punto)

Dunque $I_x\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$

c) $y = \log_5(3x + 9) \Leftrightarrow 5^y = 3x + 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \cdot 5^y - 3$ (1 punto)

Dunque $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot 5^x - 3$

d) Grafico di $f: C$; Grafico di $f^{-1}: D$ (1 punto)

e) $D_g =]4; +\infty[$ (1 punto)

f) $\log_5(3x + 9) = \log_5(x + 3) + \log_5(x - 4)$ (2 punti)

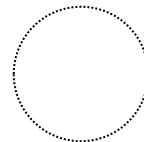
$$\Leftrightarrow \log_5(3x + 9) = \log_5(x^2 - x - 12) \Leftrightarrow 3x + 9 = x^2 - x - 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 7, x_2 = -3$$

$$x_1 \in D_f \text{ e } D_g, \quad x_2 \notin D_f \text{ e } D_g$$

$$y_1 = f(7) = \log_5(30)$$

Dunque $I(7; \log_5(30))$

**Esercizio 4 (7 punti)**

$$\text{a) } x^2 \leq \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 9}{x^2} \leq 0 \quad V.E.: x = 0$$

(2 punti)

	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$x + \sqrt{3}$	-	0	+
$x - \sqrt{3}$	-	-	0
$x^2 + 3$	+	+	+
x^2	+	+	+
<i>fraz.</i>	+	0	-

$$\Leftrightarrow \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 3)}{x^2} \leq 0$$

$$S = [-\sqrt{3}; 0[\cup]0; \sqrt{3}]$$

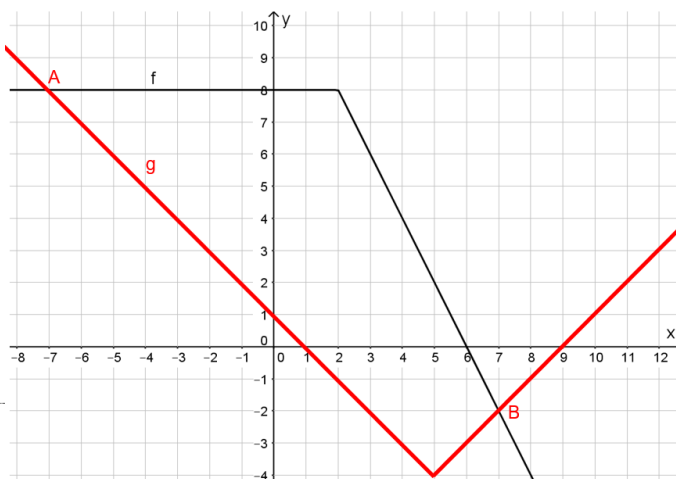
b)**i) legge della funzione f :**

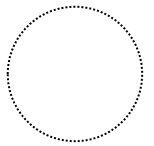
(1.5 punti)

$$f: x \mapsto y = \begin{cases} 8 & \text{per } x \in]-\infty; 2] \\ -2x + 12 & \text{per } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

ii)

(1 punto)





iii) $g(x) = 18 \Leftrightarrow |x - 5| - 4 = 18 \Leftrightarrow |x - 5| = 22$ (1 punto)

$$\Leftrightarrow x - 5 = 22 \text{ oppure } x - 5 = -22 \Leftrightarrow x = 27 \text{ oppure } x = -17$$

Verifica:

$$x = 27 : |27 - 5| - 4 = |22| - 4 = 18$$

$$x = -17 : |-17 - 5| - 4 = |-22| - 4 = 18$$

Dunque $g(x) = 18$ quando $x = -17$ oppure $x = 27$

iv) $f(x) < 5 - x$

(1.5 punti)

$$S =] - \infty; -3[\cup]7; +\infty[$$

**Esercizio 5 (7 punti)**

$$\mathbf{a)} \quad \|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{36 + 9 + 36} = \boxed{9\text{ m}}$$

(1 punto)

$$\mathbf{b)} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 6 - 3t \\ 1 = 7 - 3t \\ -3 = -13 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \text{ quindi } \boxed{\text{si}}$$

(2 punti)

$$\mathbf{c)} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6 = -3h \\ -3 = -3h \\ -6 = 5h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = -2 \\ h = -1 \\ h = -\frac{6}{5} \end{cases} \text{ quindi } \boxed{\text{no}} \quad (2 \text{ punti})$$

$$\mathbf{d)} \quad \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ y_B - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ y_B - 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 30 - 3(y_B - 1) - 18 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_B = 5}$$

(2 punti)