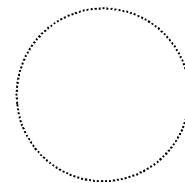


Cantone Ticino



# **Esami di Matematica**

**Liceo Artistico**

**Scuola Cantonale d'Arte artistico**

**Sessione 6 giugno 2017**

**Fascicolo delle soluzioni**



## Soluzione esercizio 1

a)

Con  $\vec{QP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$  e  $\vec{QR} = \begin{pmatrix} -13 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$ , per il *prodotto scalare* in  $\mathbb{R}^3$ , si ha

$$\angle PQR = \arccos \left( \frac{\vec{QP} \cdot \vec{QR}}{\|\vec{QP}\| \cdot \|\vec{QR}\|} \right) = \arccos \left( \frac{155}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{347}} \right) \approx 18^\circ 30' 50'',$$

inoltre, con  $\vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ , per il *teorema dei seni*, si ha  $\frac{\|\vec{PR}\|}{\sin(\angle PQR)} = \frac{\|\vec{QP}\|}{\sin(\angle PRQ)} \iff$

$$\angle PRQ = \arcsin \left( \frac{\|\vec{QP}\| \cdot \sin(\angle PQR)}{\|\vec{PR}\|} \right) \approx \arcsin \left( \frac{\sqrt{77} \cdot \sin(18^\circ 30' 50'')}{\sqrt{114}} \right) \approx 15^\circ 07' 38'',$$

e per finire  $\angle QPR = 180^\circ - \angle PRQ - \angle RQP \approx 146^\circ 21' 32''$ ;

b)  $s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

c)

con  $s: \vec{OS} = \vec{OP} + \lambda \cdot \vec{PQ} \iff s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ , con  $u \in \mathbb{R}$ , si ha

$$r \cap s: \begin{cases} 5 + 5u = 2 + t \\ 3 + 6u = 1 + 2t \\ 1 + 4u = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -t + 5u = -3 \\ -2t + 6u = -2 \\ 4u = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ u = -1 \end{cases} \text{ quindi}$$

$s$  ed  $r$  sono incidenti nel punto  $r \cap s = \{(0, -3, -3)\}$ .



d)

L'equazione cartesiana del piano  $\alpha \supset r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}_0 + t \vec{d}_r$ , con  $t \in \mathbb{R}$  e  
con  $P(5, 3, 1) \in \alpha$  si trova ponendo, per  $\vec{X} = (x, y, z)^T \in \alpha$ , il seguente prodotto misto

$$[\vec{r}_0 - \vec{X}, \vec{r}_0 - \vec{OP}, \vec{d}_r] = 0 \iff \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 1 \\ 1-y & -2 & 2 \\ -3-z & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} 1-y & -2 \\ -3-z & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2-x & -3 \\ -3-z & -4 \end{vmatrix} = 0 \iff -4 + 4y - 6 - 2z - 2 \cdot (-8 + 4x - 9 - 3z) = 0,$$

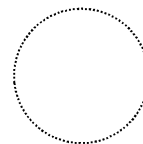
quindi  $\alpha: -2x + y + z + 6 = 0$ .

e)

Q(1,-1,-3)

f)

k=25/13



## Soluzione esercizio 2

a) Lato del primo quadrato (ABCD) =  $a$

$$\text{Lato del secondo quadrato (EFGH)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2} = \sqrt{\frac{10}{16}a^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

b) Lato del terzo quadrato (JLNP) =

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{16^2}a^2 + \frac{9 \cdot 10}{16^2}a^2} = \sqrt{\frac{100}{16^2}a^2} = \frac{10}{16}a = \frac{5}{8}a$$

c) PG infinita, decrescente, con termina iniziale  $a$  e la ragione  $q$  vale

$$q = \frac{5}{8}a : \frac{\sqrt{10}}{4}a = \frac{5}{8}a \cdot \frac{4}{\sqrt{10}a} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{2 \cdot 10} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{d) } a_6 = a \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^5 = \frac{100\sqrt{10}}{1024}a = \frac{25\sqrt{10}}{256}a$$

e) La somma dei lati è data allora da

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{a}{\frac{4 - \sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{4 - \sqrt{10}} = \frac{4a(4 + \sqrt{10})}{6} = \frac{2a(4 + \sqrt{10})}{3}$$

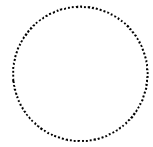
## Soluzione esercizio 3

a)  $32^\circ$

b)  $f = 11,79 \text{ m}$

c)  $g = 108,60 \text{ m}$

d)  $h = 96,05 \text{ m}$



## Soluzione esercizio 4

1.

$$C_0 \left(1 + \frac{1,7}{100}\right)^n = 2C_0$$

$$(1,017)^n = 2$$

$$\log(1,017)^n = \log 2$$

$$n \log(1,017) = \log 2$$

$$n = \frac{\log 2}{\log(1,017)}$$

$$n = 41,1189...$$

$$n = 41 \text{anni} 1 \text{mese} 12/13 \text{gg}$$

2.

$$(2^x)^{x+2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}}$$

$$2^{x^2+2x} = \left(4^x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x^2+2x} = \left(2^2\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$2^{x^2+2x} = 2^{\frac{2x}{2}}$$

$$2^{x^2+2x} = 2^x$$

uguagliamo gli esponenti e troviamo un'equazione di secondo grado

$$x^2 + 2x = x$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

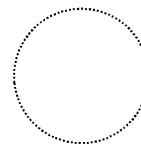
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

3.

a)  $N(5) = 16/5$

b)  $t = 7,21 \text{ ore} = 7 \text{ ore } 12 \text{ minuti } 45 \text{ sec}$

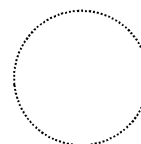


### **Soluzione esercizio 5**

- a)  $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$   
b)  $C(-3, 1)$  e  $r = \sqrt{2}$        $2 = (x + 3)^2 + (y - 1)^2$

### **Soluzione esercizio 6**

- a) Vertice :  $V(20; -2)$   
b)  $y = 6x - 180$   
c)  $B(28,47; -9,17)$   
d)  $d = 14,1$



## **SOLUZIONI**

---

### **Scala di valutazione dell' esame su 60 punti**

Punteggio	Voto
0 - 11	2
12 - 16	2.5
17 - 22	3
23 - 27	3.5
28 - 33	4
34 - 39	4.5
40 - 45	5
46 - 51	5.5
> 52	6

### **Scala di valutazione dell' esame su 50 punti**

Punteggio	Voto
0 - 9	2
10 - 14	2.5
15 - 18	3
19 - 23	3.5
24 - 27	4
28 - 32	4.5
33 - 37	5
38 - 42	5.5
> 43	6