Cantone Ticino

Esami di Matematica

Liceo Artistico

Scuola Cantonale d’Arte artistico

Sessione 6 giugno 2017

Fascicolo delle soluzioni

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1

a)

Con $\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}-5\\-6\\-4\end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-13\\-13\\-3\end{pmatrix}$, per il *prodotto scalare* in $\mathbb{R}^3$, si ha

$$\angle PQR=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{QP}\bullet\overrightarrow{QR}}{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{QR}\right\|}\right)=\arccos\left(\frac{155}{\sqrt{77}\cdot\sqrt{347}}\right)\approx 18°30'50'',$$

inoltre, con $\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}-8\\-7\\1\end{pmatrix}$, per il *teorema dei seni*, si ha $\dfrac{\left\|\overrightarrow{PR}\right\|}{\sin(\angle PQR)}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|}{\sin(\angle PRQ)}\Longleftrightarrow$

$$\angle PRQ=\arcsin\left(\frac{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|\cdot\sin(\angle PQR)}{\left\|\overrightarrow{PR}\right\|}\right)\approx\arcsin\left(\frac{\sqrt{77}\cdot\sin(18°30'50'')}{\sqrt{114}}\right)\approx 15°07'38'',$$

e per finire $\angle QPR=180°-\angle PRQ-\angle RQP\approx 146°21'32''$;

b) $s:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

c)

con $s:\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ}\Longleftrightarrow s:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$, con $u\in\mathbb{R}$, si ha

$$r\cap s:\begin{cases}5+5u=2+t\\3+6u=1+2t\\1+4u=-3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-t+5u=-3\\-2t+6u=-2\\4u=-4\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}t=-2\\u=-1\end{cases}\quad\text{quindi}$$

s ed r sono incidenti nel punto $r\cap s=\{(0,-3,-3)\}$.

SOLUZIONI

d)

L'equazione cartesiana del piano $\alpha \supset r$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r_0} + t\,\vec{d_r}$, con $t \in \mathbb{R}$ e con $P(5,3,1) \in \alpha$ si trova ponendo, per $\vec{X} = (x,y,z)^T \in \alpha$, il seguente prodotto misto

$$[\vec{r_0} - \vec{X}, \vec{r_0} - \overrightarrow{OP}, \vec{d_r}] = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 1 \\ 1-y & -2 & 2 \\ -3-z & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-y & -2 \\ -3-z & -4 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 2-x & -3 \\ -3-z & -4 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -4+4y-6-2z-2\cdot(-8+4x-9-3z) = 0,$$

quindi $\alpha: -2x+y+z+6=0$.

e)

Q(1,-1,-3)

f)

k=25/13

Soluzione esercizio 2

a) Lato del primo quadrato (ABCD) = a

Lato del secondo quadrato (EFGH) = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}a^2+\frac{9}{16}a^2}=\sqrt{\frac{10}{16}a^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$

b) Lato del terzo quadrato (JLNP) =

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2+\left(\frac{3}{4}\frac{\sqrt{10}}{4}a\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{16^2}a^2+\frac{9.10}{16^2}a^2}=\sqrt{\frac{100}{16^2}a^2}=\frac{10}{16}a=\frac{5}{8}a$$

c) PG infinita, decrescente, con termina iniziale a e la ragione q vale

$$q=\frac{5}{8}a:\frac{\sqrt{10}}{4}a=\frac{5}{8}a.\frac{4}{\sqrt{10}a}=\frac{5}{2\sqrt{10}}=\frac{5.\sqrt{10}}{2.10}=\frac{5\sqrt{10}}{20}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

d) $a_6=a.\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^5=\frac{100\sqrt{10}}{1024}a=\frac{25\sqrt{10}}{256}a$

e) La somma dei lati è data allora da

$$S_\infty=\frac{a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}}=\frac{a}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}}=\frac{4a}{4-\sqrt{10}}=\frac{4a.\left(4+\sqrt{10}\right)}{6}=\frac{2a\left(4+\sqrt{10}\right)}{3}$$

Soluzione esercizio 3

a) 32°
b) f = 11,79 m
c) g = 108,60 m
d) h = 96,05 m

Soluzione esercizio 4

1.

$$C_0\left(1+\frac{1{,}7}{100}\right)^n = 2C_0$$
$$(1{,}017)^n = 2$$
$$\log(1{,}017)^n = \log 2$$
$$n\log(1{,}017) = \log 2$$
$$n = \frac{\log 2}{\log(1{,}017)}$$
$$n = 41{,}1189...$$
$$n = 41 anni 1 mese 12/13 gg$$

2.

$$(2^x)^{x+2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}}$$
$$2^{x^2+2x} = \left(4^x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$2^{x^2+2x} = \left(2^2\right)^{\frac{x}{2}}$$
$$2^{x^2+2x} = 2^{\frac{2x}{2}}$$
$$2^{x^2+2x} = 2^x$$

uguagliamo gli esponenti e troviamo un`equazione di secondo grado

$$x^2 + 2x = x$$
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x+1) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -1$$

3.

a) N(5)=16/5

b) t=7,21 ore= 7 ore 12 minuti 45 sec

Soluzione esercizio 5

a) $x^2+y^2-x+y-2=0$
b) C(-3,1) e $r=\sqrt{2}$ $\quad 2=(x+3)^2+(y-1)^2$

Soluzione esercizio 6

a) Vertice : $V(20; -2)$
b) y=6x-180
c) B(28,47; -9,17)
d) d = 14,1

Scala di valutazione dell' esame su 60 punti

Punteggio	Voto
0 - 11	2
12 - 16	2.5
17 - 22	3
23 - 27	3.5
28 - 33	4
34 - 39	4.5
40 - 45	5
46 - 51	5.5
> 52	6

Scala di valutazione dell' esame su 50 punti

Punteggio	Voto
0 - 9	2
10 - 14	2.5
15 - 18	3
19 - 23	3.5
24 - 27	4
28 - 32	4.5
33 - 37	5
38 - 42	5.5
> 43	6