Cantone Ticino

# Esami di maturità specializzata
# Indirizzo sociosanitario

## Sessione 7 giugno 2018

# Matematica

# SOLUZIONI

**Esercizio 1 (15 punti)**

Risolvere i seguenti quesiti:

a) Calcolare lo scarto interquartile della serie di dati (lasciare il risultato in frazione):

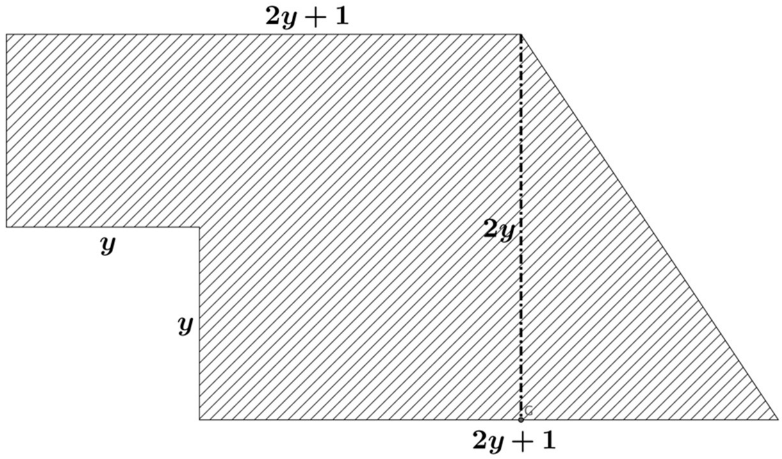
$$-1\ ;\ -\frac{1}{8}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;-\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{2}\ \ ;\ 1$$

SOL:

$$\Delta Q = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8}$$

(3 punti)

b) La figura qui a fianco è stata costruita togliendo un quadrato da un trapezio rettangolo. Determinare, nella forma più semplice possibile, l'area $\boldsymbol{A(y)}$ della figura grigia.




$$A_{TRAP} = \frac{[(2y+1+y)+2y+1]\cdot 2y}{2} = y(5y+2) = 2y+5y^2$$

$$A_{QUAD} = y^2$$

$$\boldsymbol{A(y)} = 2y + 5y^2 - y^2 = \boxed{4y^2+2y}$$

(3 punti)

c) Determinare il/i valore/i di $\boldsymbol{k}$ affinché l'equazione quadratica: $-x^2 + \boldsymbol{k}x - 9 = 0$ abbia un'unica soluzione (reale)?

$$\Delta = k^2 - 4\cdot(-1)(-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (k-6)(k+6) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_{1,2} = \pm 6}$$

(3 punti)

d) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x(2x+1) < (3x-1)2x \\ -\frac{6}{5} \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x(2x+1) < (3x-1)2x \\ -\frac{6}{5} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 3x < 6x^2 - 2x \\ -\frac{6}{5} \geq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x < 0 \\ -\frac{6}{5} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{6}{5} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S = \left]-\infty; -\frac{6}{5}\right]}$$

(3 punti)

e) Un chimico ha preparato 30 g di una soluzione in cui il 40% è alcool. Se aggiungo 10 grammi di alcool puro quale sarà la concentrazione percentuale di alcool nella soluzione finale.

$x$: percentuale

$$\frac{40}{100} \cdot 30 = 12\ g \text{ (di alcool)}$$

$$(12 + 10) = \frac{x}{100}(30 + 10)$$

$$\Leftrightarrow 2200 = 40x \Leftrightarrow x = \frac{2200}{40} = 55 \Leftrightarrow \boxed{x = 55}$$

(3 punti)

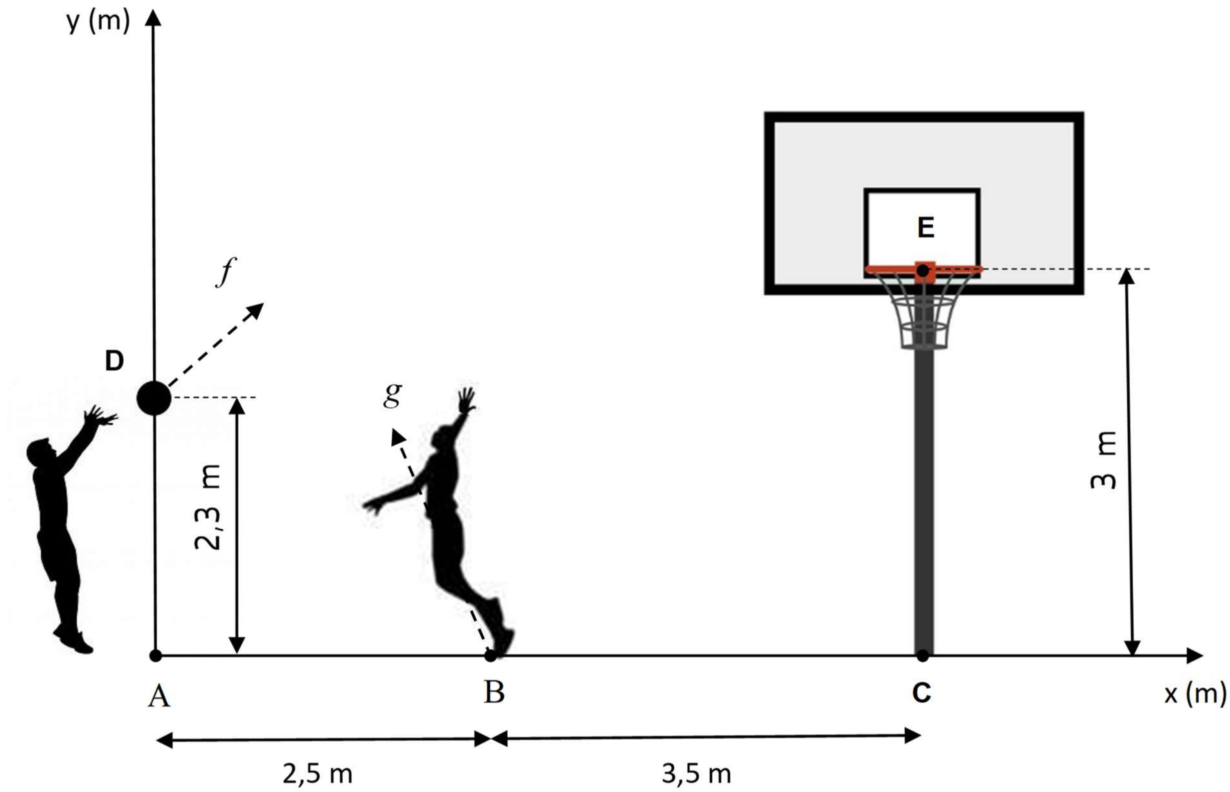
**Esercizio 2 (15 punti)**

Nella figura seguente la palla è tirata da un giocatore di basket dalla posizione D verso il canestro (punto E). Il punto A è l'origine degli assi.

Nel sistema di assi cartesiani indicato, la traiettoria $f$ della palla è descritta da (x e y in metri):

$$f: x \longmapsto y = -\frac{1}{8}x^2 + bx + c$$

con $b$ e $c$ parametri reali.




(il disegno è indicativo e non in scala)

a) Utilizzando le informazioni ricavate dal grafico, determinare il valore del parametro $c$.

$$c = 2{,}3 = \frac{23}{10}$$

(3 punti)

b) Determinare il valore del parametro $b$ sapendo che la palla raggiunge la massima altezza dal suolo quando si trova ad una distanza orizzontale x = 3,5 m dal punto A.

Considero il vertice $V(x_v=3{,}5;\ y_v)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad 3{,}5 = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2} = -\frac{b}{2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7}{8}$$

(4 punti)

Durante la partita viene effettuato un altro tiro, che ha come traiettoria la seguente funzione (diversa dalla precedente):

$$h: x \longmapsto y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$$

c) Determinare, motivando opportunamente la risposta, se il pallone:
- andrà a canestro (punto E);
- passerà sopra il canestro;
- passerà sotto il canestro.

E (6;3) h(6) = $-\frac{1}{8} \cdot 6^2 + \frac{3}{4} \cdot 6 + 2 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{20} + 2 = 2 < 3$

passerà sotto il canestro.

(4 punti)

Considerare ora il giocatore avversario (nella posizione B) che tenta di intercettare il pallone lanciato verso il canestro.

d) Determinare l'equazione della funzione $g$ di primo grado che passa per il punto B e il punto di coordinate $(2; 3)$.

Retta passante per $(2; 3)$ e $(2{,}5; 0)$:

$$\begin{cases} 2{,}5a + b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad 0{,}5a = -3 \quad \Rightarrow \; a = -6$$

$$\Rightarrow \; b = 3 - 2 \cdot (-6) = 15$$

$$y = -6x + 15$$

(4 punti)

**Esercizio 3 (15 punti)**

<u>Prima parte (indipendente dalla seconda)</u>

Il valore residuo di un macchinario industriale per produrre cioccolatini segue la seguente formula

$$V(t) = 45000 \cdot 3^{k \cdot t}$$

dove : $k$ è un parametro;
$t$ il tempo in anni trascorso dall'acquisto;
$V$ il valore residuo in CHF in funzione del tempo $t$.

a) Determinare qual è il valore iniziale del macchinario.

$$V(t) = 45000 \cdot 3^{0 \cdot t} = 45000\ CHF$$

(2 punti)

b) Determinare $k$ sapendo che dopo 6 anni il macchinario è valutato a 15000 CHF.

$$15000 = 45000 \cdot 3^{k \cdot 6}$$
$$\frac{1}{3} = 3^{k \cdot 6}$$
$$3^{k \cdot 6} = 3^{-1}$$
$$6k = -1$$
$$k = \frac{-1}{6}$$

(3 punti)

*Se non è stato determinato il valore di k, utilizzare in seguito*
$k = -0{,}2$.

c) Calcolare dopo quanto tempo il macchinario avrà un valore residuo di 35000 CHF. Esprimendo il risultato in anni e mesi.

$$35000 = 45000 \cdot 3^{-\frac{1}{6} \cdot t}$$
$$3^{-\frac{1}{6} \cdot t} = \frac{7}{9}$$
$$log\left(3^{-\frac{1}{6} \cdot t}\right) = \log\left(\frac{7}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{6} t log(3) = log\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$t = \frac{-6. log\left(\frac{7}{9}\right)}{\log(3)} = 1{,}37 anni = 1\ anno\ e\ 4\ mesi$$

Con k = -0,2

$$35000 = 45000 \cdot 3^{-0.2 \cdot t}$$
$$3^{-0.2 \cdot t} = \frac{7}{9}$$

$$log(3^{-0,2t}) = log\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$-0,2tlog3 = log\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$t = \frac{log\left(\frac{7}{9}\right)}{-0,2log3} = 1,14anni = 1\ anno\ e\ 2\ mesi$$

(4 punti)

<u>Seconda parte (indipendente dalla prima)</u>

Data la seguente funzione

$$g: \left]\frac{-5}{4};\ +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = 2 \cdot \log_5(4x+5) - 1$$

Si chiede di:

d) Calcolare l'immagine di 5.

$$y = 2 \cdot \log_5(4.5+5) - 1 = 2\log_5 25 - 2 = 2.2 - 1 = 3$$

(2 punti)

e) Calcolare i punti d'intersezione della funzione con gli assi cartesiani.

x=0

$y = 2 \cdot \log_5(4.0+5) - 1 = 2.\log_5(5) - 1 = 2 - 1 = 1$ (0;1)

y=0

$$0 = 2 \cdot \log_5(4x+5) - 1$$
$$1 = 2 \cdot \log_5(4x+5)$$
$$\frac{1}{2} = \log_5(4x+5)$$
$$4x + 5 = 5^{\frac{1}{2}}$$

$x = \frac{5^{\frac{1}{2}}-5}{4} = -0,69$ (- 0,69;0)

(4 punti)

## Esercizio 4 (20 punti)

Ecco i dati riguardanti il numero di adozioni in Svizzera secondo l'età delle persone adottate e l'anno di adozione.

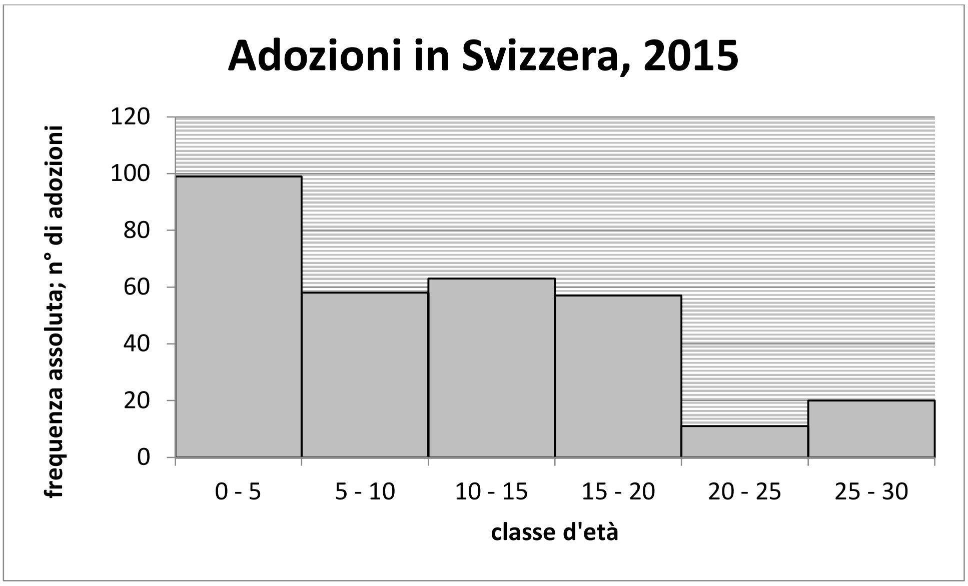
| Classe d'età | 2000 | 2015 |
|---|---|---|
| 0 - 5 | 283 | 99 |
| 5 - 10 | 233 | 58 |
| 10 - 15 | 161 | 63 |
| 15 - 20 | 83 | 57 |
| 20 - 25 | 18 | 11 |
| 25 - 30 | 9 | 20 |
| Totale | 787 | 308 |

a) Calcolare la diminuzione in percentuale del numero totale di adozioni fra il 2000 e il 2015. Arrotondare il risultato al decimo.

(787-308)*100/787 = 479*100/787 = **60,9%**

(2 punti)

b) Rappresentare graficamente la situazione dell'anno 2016. Ricorda di completare la denominazione degli assi cartesiani e di dare un titolo al grafico.




(3 punti)

c) Completare la tabella, arrotondando le percentuali all'unità.

| Tabella A | Adozioni secondo anno e età in Svizzera - 2016 |
|---|---|

(M: media)

| Classe d'età | Valore centrale: $x_i$ | Frequenza assoluta: $f_i$ | Frequenza relativa % | Frequenza cumulata % | $f_i.x_i$ | $f_i.(x_i-M)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0-5** | 2.5 | 82 | 24% | 24% | 205.0 | 9'040.50 |
| **5-10** | 7.5 | 41 | 12% | 36% | 307.5 | 1'240.25 |
| **10-15** | 12.5 | 64 | 19% | 55% | 800.0 | 16.00 |
| **15-20** | 17.5 | 88 | 26% | 81% | 1'540.0 | 1'782.00 |
| **20-25** | 22.5 | 28 | 8% | 89% | 630.0 | 2'527.00 |
| **25-30** | 27.5 | 39 | 11% | 100% | 1'072.5 | 8'199.75 |
| **Totale** | | 342 | 100% | | 4'555.0 | 22'805.50 |

(5 punti)

d) Determinare la classe modale nell'anno 2016.

**Classe 15-20**

(2 punti)

e) Determinare le classi che contengono rispettivamente la mediana e il terzo quartile nell'anno 2016.

**Mediana = $Q_2$ classe 10-15**
**$Q_3$ classe 15-20**

(2 punti)

f) Determinare la media e lo scarto quadratico medio dell'anno 2016. Arrotondare i risultati all'unità.

$$\bar{x} = \frac{4555}{342} = 13{,}32 \approx 13 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{22805.5}{342}} = 8{,}17 \approx 8$$

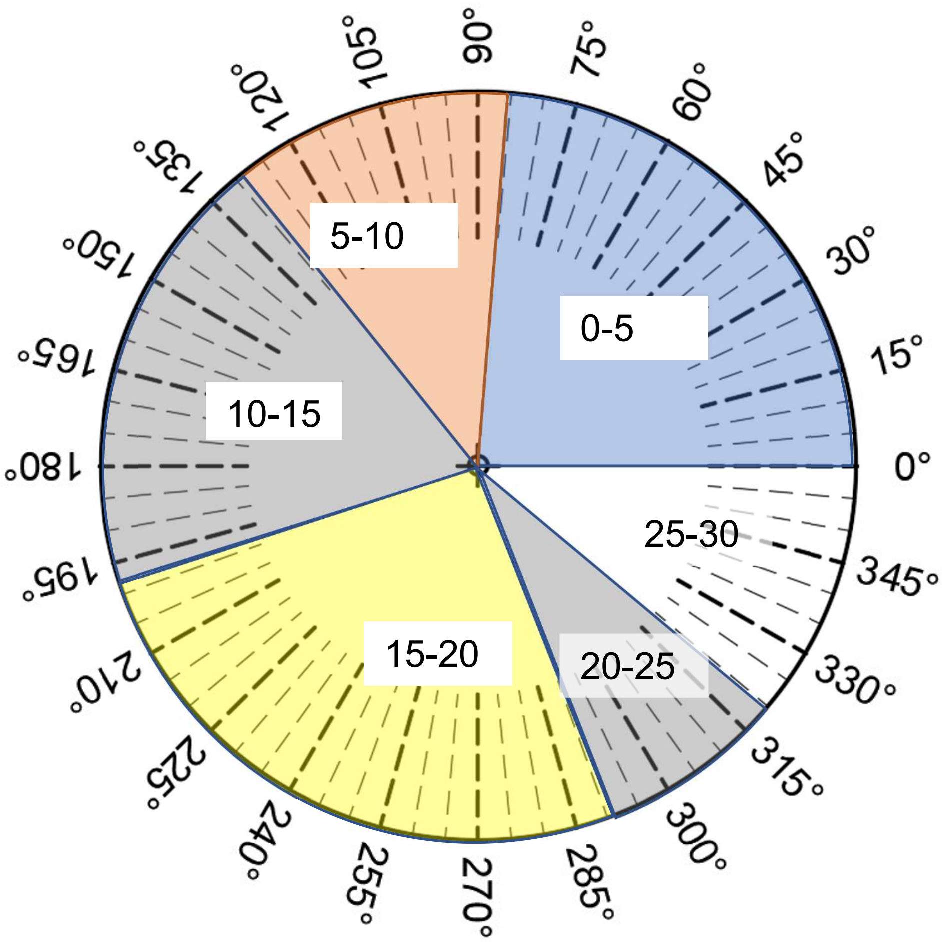
(3 punti)

g) Completare la tabella qui sotto (è la continuazione di quella precedente) e rappresentare, nella figura sottostante, il diagramma a torta dell'anno 2016.

| **Tabella A** | **Adozioni in Svizzera, anno 2016** |
|---|---|
| **Classe d'età** | **Ampiezza del settore circolare (arrotondare al grado)** |
| **0-5** | 86° |
| **5-10** | 43° |
| **10-15** | 68° |
| **15-20** | 94° |
| **20-25** | 29° |
| **25-30** | 40° |

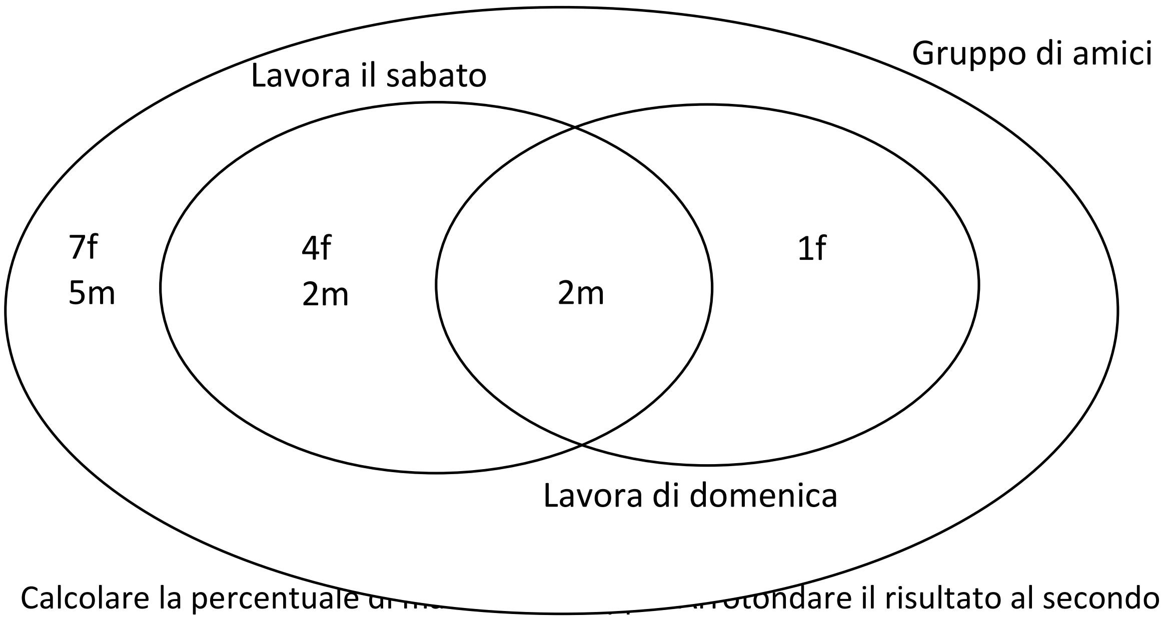
(3 punti)

La soluzione indicata non è l'unica possibile.




**Esercizio 5 (10 punti)**

Il seguente diagramma di Eulero-Venn rappresenta un gruppo di 21 amici (maschi e femmine) che possono lavorare il sabato, la domenica o avere libero l'intero week-end




a) Calcolare la percentuale [illegible] arrotondare il risultato al secondo decimale.

| |
|---|
| 9/21=42,86% |

(2 punti)

b) Scegliendo a caso una persona dal gruppo, calcolare la probabilità che la persona scelta non lavori né il sabato né la domenica.

| |
|---|
| P=12/21=57,14% |

(2 punti)

Scegliendo una persona a caso dal gruppo, considerare i seguenti eventi:

$S$ = "la persona scelta lavora il sabato"
$F$ = "la persona scelta è una femmina"
$L1$ = "la persona scelta ha almeno un giorno libero nel week-end"

c) Calcolare $p(L1|S)$.

$$p(L1|S) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(2 punti)

d) Calcolare $p(F\ o\ S)$.

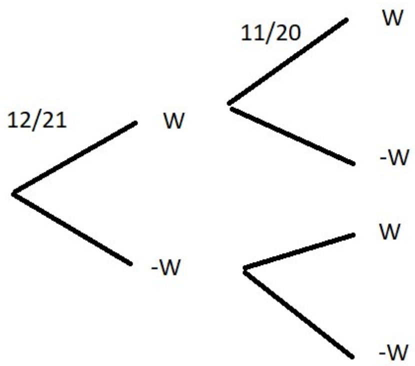
| |
|---|
| |

$$p(F\ o\ S) = \frac{16}{21} = 76{,}19\%$$

(2 punti)

e) Scegliendo due persone a caso dal gruppo calcolare la probabilità che riescano ad organizzare una gita in montagna di due giorni nel week-end.

Affinché possano organizzare una gita di due giorni entrambi devono avere il week-end libero (W)




$$p = \frac{12}{21} * \frac{11}{20} = \frac{11}{35} = 31{,}43\%$$

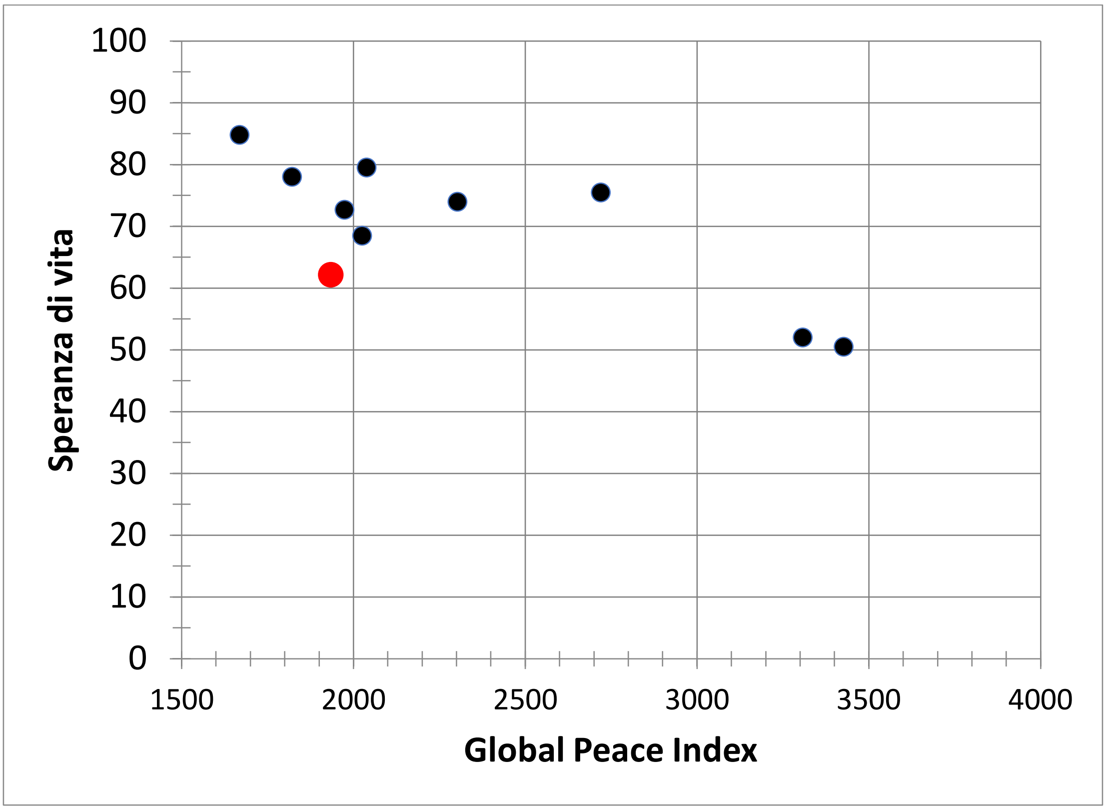
(2 punti)

**Esercizio 6 (15 punti)**

Il Global Peace Index (GPI) assegna agli Stati un punteggio in base ad indicatori di criminalità, violenza, armamenti. Ad un punteggio basso corrisponde uno Stato pacifico. Nella tabella seguente si è cercato di mettere in relazione questo indice con la speranza di vita per dieci Stati.

| Stato | GPI | Speranza di vita in anni |
|---|---|---|
| Afghanistan | 3427 | 50.5 |
| Albania | 1821 | 78 |
| Bolivia | 2025 | 68.5 |
| Colombia | 2720 | 75.5 |
| Italia | 1669 | 84.8 |
| Nicaragua | 1974 | 72.7 |
| Somalia | 3307 | 52 |
| Tanzania | 1903 | 62 |
| Thailandia | 2303 | 74 |
| USA | 2038 | 79.5 |

a) Qui sotto è riportato in modo parziale il grafico dei dati indicati nella tabella: un punto non è stato indicato.
È richiesto di completare il grafico.




(2 punti)

b) Quale tra le seguenti proposte è il coefficiente di correlazione? Argomentare brevemente.

| | | |
|---|---|---|
| $r = 1$ | $r = -0{,}088$ | $r = -1{,}15$ |
| $r = -0{,}784$ | $r = 0{,}853$ | $r = -1$ |

L'unico coefficiente di correlazione di Pearson possibile è
r=-0,784.
La correlazione è lineare, negativa, forte.

(2 punti)

c) Quale tra le seguenti proposte è l'equazione della retta dei minimi quadrati (retta di regressione)? Argomentare in modo chiaro.

| | |
|---|---|
| $y = -1{,}45x + 103$ | $y = 1{,}45x + 82$ |
| $y = -0{,}0145x + 103$ | $y = -0{,}0145x + 82$ |
| $y = 0{,}0145x + 103$ | $y = 0{,}0145x + 82$ |

La retta di regressione ha pendenza di circa -30/2000=-0,015. l'ordinata all'origine (intercetta) deve essere circa 100 poiché è necessario prolungare la retta fino a GPI=0.
L'equazione giusta è $y = -0{,}0145x + 103$.

(3 punti)

Utilizzare nelle prossime domande la retta di regressione determinata alla domanda c).

d) In Svizzera il punteggio GPI è 1275. Calcolare la speranza di vita secondo questa modellizzazione.

circa 84 anni e mezzo:

$$y = -0{,}0145 \cdot 1275 + 103 \approx 84{,}5$$

(2 punti)

e) Calcolare a quale punteggio GPI corrisponde una speranza di vita di 62 anni.

circa 2828:

$$62 = -0{,}0145 \cdot x + 103 \Rightarrow x = \frac{41}{0{,}0145} \approx 2828$$

(3 punti)

f) Secondo questa modellizzazione, a quale variazione di speranza di vita corrisponde un aumento di 1000 punti dell'indice GPI?

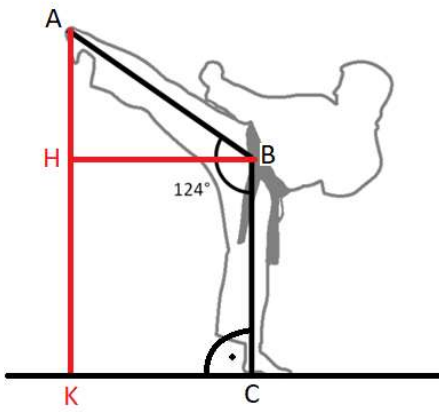
Corrisponde ad una ***diminuzione*** di quattordici anni e mezzo

$$\Delta x = 1000 \Rightarrow \Delta y = -0{,}0145 \cdot 1000 = -14{,}5$$

(3 punti)

**Esercizio 6 (15 punti) versione MS**

Risposte



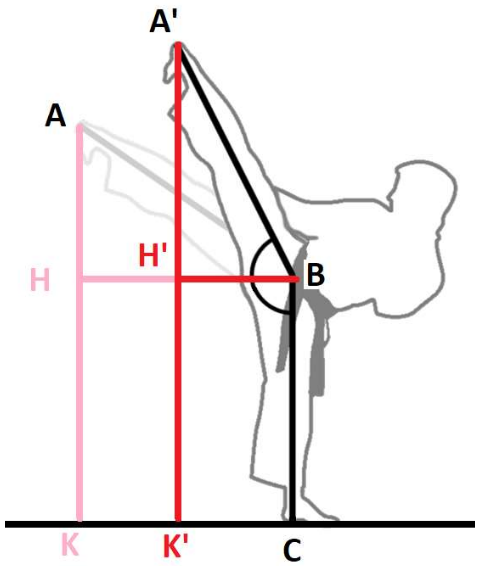

1) $AC = 95\ cm \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{124°}{2}\right) = 190\ cm \cdot \sin(62°) = 190\ cm \cdot 0{,}883$

   $AC \cong 168\ cm$

2) $AK = AH + HK = 95\ cm \cdot \sin(124° - 90°) + 95\ cm$

   $95\ cm \cdot [\sin(34°) + 1] \cong\ 95\ cm \cdot [0{,}559 + 1] == 95\ cm \cdot 1{,}559 \cong 148\ cm$

   $AK \cong 148\ cm$




3) $A'H' + H'K' = 170\ cm$

   $A'H' = 170\ cm - H'K' = 170\ cm - 95\ cm$
   $= 75\ cm$

   $95\ cm \cdot \sin(\alpha - 90°) = 75\ cm$

   $\sin(\alpha - 90°) = \dfrac{75\ cm}{95\ cm}$

   $\alpha - 90° = \arcsin\left(\dfrac{15}{19}\right) = \arcsin(0{,}789) \cong 52°$

   $\alpha \cong 52° + 90° = 142°$

   $\alpha \cong 142°$

4) $BH = 95\ cm \cdot \cos(124° - 90) = 95\ cm \cdot \cos(34°) = 95\ cm \cdot 0{,}829 = 79\ cm$

   $BH' = 95\ cm \cdot \cos(142° - 90) = 95\ cm \cdot \cos(52°) = 95\ cm \cdot 0{,}61 = 58\ cm$

   $BH - BH' = 79 cm - 58\ cm = 114\ cm$

   Dovrebbe avvicinarsi di 21 cm