INTRODUZIONE

Diamo una panoramica molto succinta delle premesse sociali, storiche e pedagogiche che hanno portato il gruppo di studio ad elaborare il presente programma secondo nuovi criteri che possono farlo apparire, agli occhi dei non specialisti, un programma di rottura rispetto a quelli vigenti attualmente nella maggior parte delle nostre scuole.

1. Aspetto sociale: matematica e società

Trattiamo per primo questo aspetto, non perchè lo riteniamo più importante di altri, ma perché è visto più facilmente dai non specialisti.

Un tempo si riteneva che il campo d'azione della matematica si limitasse alle scienze fisiche, ma, nell'ultimo secolo, in particolare negli ultimi decenni, l'evoluzione tecnologica della società in cui viviamo ha creato nuove situazioni, per cui oggi è difficile trovare un'attività umana completamente estranea al mondo della matematica.

La presenza massiccia nella vita di tutti i giorni di una scienza che, fino a pochi decenni fa, si riteneva riservata a pochi «eletti», porta alla conclusione che: «...non è più il tempo di una matematica per l'élite, ma di una matematica per tutti...» (Gilbert Walusinski - Guide Blanc -Pourquoi une mathématique moderne?). Con ciò non si preconizza l'avvento di una specie d'imperialismo matematico, ma una formazione matematica di base per tutti, da svolgersi quindi essenzialmente nella scuola dell'obbligo.

E' quanto traspare da un drammatico interrogativo posto da A. Lichnérowicz: «Veuton sacrifler la démocratie, former deux espèces de citoyens? D'un côté, des spécialistes, une élite, qui monopolise le pouvoir, parce qu'elle a accès au savoir scientifique, et, de l'autre, un troupeu d'ilotes, un se contenteront de subir, parce qu'ils ne parleront pas la langue du monde où ils vivront?»

2. Aspetto storico: le tappe plù significative

Mostriamo ora, succintamente, le tappe più importanti di questa evoluzione. I segni più evidenti di un cambiamento di direzione si hanno con le ricerche di Evariste Galois (1811-1832) nel campo della risolubilità per radicali delle equazioni algebriche.

Un altro decisivo colpo di timone fu dato da Felix Klein con il suo «Programma di Erlangen» (1872) che pone alla base della Geometria il concetto di gruppo di trasformazioni.

Ma il definitivo avvio all'Irreversibile processo di rinnovamento fu dato dal tedesco Georg Cantor tra il 1878 e il 1884 con la pubblicazione di 6 memorie sulle «Mathematische Annalen», con le quali annunciava al mondo intero ia nascita della «Teorla generale degli insiemi» (ricordiamo che Cantor non fu, come molti pensano, l'in-

Gruppo di lavoro

Gianfranco Arrigo
Francesco Cavalli
Lidia Arienti
Fausto Boscacci
Valerio Cassina
Tiziano Ferracini
Maurice Froidcoeur
Giorgio Mainini
Edoardo Montella
Albino Pinana
Gabriella Solcà
Maria Zanetti-Ripamonti

ventore ma il sistematore, a livello teorico, della teoria degli insiemi).

Facendo un salto di una cinquantina d'anni (densissimi, peraltro, di risultati e scoperte) arriviamo (1931) alla tappa forse più importante e significativa della storia della cosiddetta «matematica moderna», la pubblicazione del trattato «Moderne Algebra» dell'olandese Van der Warden, opera che riprende idee presentate qualche anno prima da Emil Artin ed Emmy Noether nei loro corsi all'università di Amburgo.

L'algebra astratta conoscerà da allora uno straordinario sviluppo: «... in altre parole, l'Algebra è diventata una specie di linguaggio universale della scienza...» (G. Walusinski - G. Blanc - Pourquoi une mathématique moderne?).

Qualche anno più tardi (1939) ha inizio la pubblicazione di una grande ed ambiziosa opera collettiva, gli «Eléments de Mathématiques» sotto lo pseudonimo collettivo di Nicolas Bourbaki. Al gruppo di Bourbaki si deve il concetto generale e preciso di estruttura matematica», l'individuazione delle «strutture madri» e con ciò tutta una nuova «architettura della matematica».

Non si deve però pensare, come qualcuno ha sostenuto, che l'algebra debba inglobare tutta la geometria. E' vero che una parte della geometria è algebra lineare; è però altrettanto vero che vi sono aspetti tipicamente geometrici che svolgono un ruolo fondamentale nella formazione matematica e che non sono classificabili come algebrici. Non si deve identificare la geometria con quella «euclidea», che ha praticamente costituito tutta la geometria nell'insegnamento tradizionale. Da quando, nel 1899, Hilbert pubblicò la sua famosa tesi: «Grundlagen der Geometrie», la geometria di Euclide fu considerata limitata alla geometria fisica (basata cioè sul mondo reale, anche se di esso è un'astrazione). Essa rappresenta un aspetto particolare di una teoria assiomatica che possiamo ancora chiamare geometria, ma che ha ben poco in comune con quella euclidea. L'insegnamento non può più ignorare quest'evoluzione: non ha più senso, oggi educare l'allievo al ragionamento euclideo (pretendendo così di contribuire in modo insostituibile alla sua formazione logicodeduttiva), senza mostrargli la ricchezza

della geometria intesa come teoria assiomatica.

Facciamo un salto di qualche anno per vedere come nasce il rinnovamento nell'insegnamento. Nel 1950 viene fondata, dai proff. T. Choquet, J. Piaget e C. Gattegno, la «Commission Internationale pour l'Etude et l'Ameiloration de l'Enseignement des Mathématiques».

E' sempre più sentita l'esigenza di adeguare i contenuti ed i metodi dell'insegnamento alle idee e realtà attuali. Nel 1958, viene indetto, a Bruxelles, un congresso della Società Matematica Belga; si gettano le basi per il Colloquio di Royaumont e si organizza un referendum internazionale sullo stato dell'insegnamento matematico nelle varie parti del mondo. E' l'Organizzazione per il Coordinamento e lo Sviluppo Economico (O.C.S.E.) che prende l'iniziativa di convocare, nel 1959 a Royaumont e nel 1960 a Dubrovnic, due colloqui internazionali per mettere a punto un progetto di rinnovamento dei programmi.

Le idee emerse dai due colloqui si trovano esposte nel volume «Mathématiques nouvelles», edito dail'OCSE nel 1961, e rappresentano un importante punto di riferimento per la storia del rinnovamento didattico della matematica. Ad esso si ispirano praticamente tutte le nazioni del mondo per la trasformazione dei programmi, che hanno assunto da allora estese caratteristiche comuni.

Infine la «Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico» — che aveva già riunito, nell'agosto 1967 a Utrecht, un colloquio sul tema «Come insegnare la matematica perchè sia utile?» — prende l'iniziativa di riunire a Lione (agosto 1969) un congresso internazionale importante nella storia della riforma. Vi parteciparono delegati d'America, d'Europa, d'Asia e d'Africa, confermando che ovunque il rinnovamento dei metodi e dei programmi di matematica era in atto, o quantomeno allo studio.

Ecco al proposito, un brano significativo:
«... riconoscere le necessità della riforma
non è che una tappa; il più importante, il
più difficile resta da realizzare: una vera
riforma che abbia come sbocco la sua contestazione permanente...» (G. Walusinski
G. Blanc Pourquoi une mathématique moderne?).

3. Aspetto culturale-pedagogico: «lo spirito matematico attuale nell'insegnamento»

Gustave Choquet compendia in poche frasi la differenza fra la matematica classica e quella d'oggi:

«Le matematiche che erano allo studio fi-no a una cinquantina d'anni fa passano ormai col nome di «matematiche classiche»; con esse l'attenzione era portata sui «pa-lazzi», e cioè sui singoli capitoli della matematica, e sulle «fondamenta dei palazzi», che costituivano gli elementi base delle teorie stesse, cioè sui numeri, sul punto, sulla retta ecc. Si dà invece il nome di «matematiche moderne» a quelle matematiche la cui essenza non è dovuta alla qualità del materiale utilizzato per le fondamenta, ma alle leggi operatorie che ne hanno permesso la costruzione: Invece di ragionare su enti determinati, si considerano ora diverse situazioni (le assiomatiche)». In maniera più semplice, possiamo dire che oggi si mette l'accento sulle proprietà delle relazioni tra oggetti piuttosto che sugii oggetti stessi; si mette cioè l'accento sull'operazione piuttosto che sul suo risultato. In altri termini è più importante studiare il procedimento di soluzione di un problema che eseguire i calcoli relativi.

A questo punto sono doverose due osservazioni: la prima riguarda l'aggettivo «moderne». Esso è, in fondo, solo un comodo cartellino, una falsa etichetta che induce i più sprovveduti a rompere in due il sapere matematico; ciò non è assolutamente corretto, come inesatta è la parola «moderna» affibbiata alla matematica che si vuol insegnare in una scuola moderna. La modernità è solo relativa, apparente; è, in fondo, il frutto di un lavoro di elaborazione, di messa a punto, di ricerca durato più di un secolo (come si è avuto modo di osservare nel paragrafo 2). Ciò che di «moderno» c'è nella matematica moderna è la possibilità di ricollegarsi, per insegnarla, ai più recenti metodi e alle più recenti e importanti teorie psico-pedagogiche, sulle quali sono state scritte tante opere, da ritenere superfluo entrare nel merito. La seconda osservazione riguarda più da vicino la teoria degli insiemi. Comunemente si tende a identificare la matematica moderna') con la teoria degli insiemi, quando addirittura non si dice (e, purtroppo, spesso in senso spregiativo) «l'insiemistica». La matematica moderna NON è la teoria degli insiemi! Ma: la teoria degli insiemi è MATEMATICA. Anzi, per meglio dire, la teoria degli insiemi può essere presa come fondamento di tutta la MATEMATICA. C'è da notare, inoltre, che la teoria generale degli insiemi è una materia che fa parte dell'insegnamento universitario; ciò che si insegna nelle scuole di livello medio è una teoria detta ingenua degli insie-

In conclusione citiamo un'osservazione del Prof. Caiame: «La tematica della matematica moderna che si occupa dello studio delle strutture (cioè l'Algebra Astratta n.d.r.) non fa altro che estendere e ampliare i concetti ispiratori dell'algebra letterale: quest'ultima permette di schematizzare, con una regola, la risoluzione di problemi appartenenti a diversi tipi, ma aventi la medesima struttura».

Sia ben chiaro, però, che un vero rinnovamento dei programmi di matematica non può avvenire senza un cambiamento sostanziale del metodo d'insegnamento. Perchè non si fa un insegnamento moderno semplicemente cambiando linguaggio e contenuto, e perchè «... Au risque de provoquer, chez certains, des sentiments d'horreur et de consternation il nous faut bien dire notre désaccord avec les nombreuses personnalités qui demandent aux scientifiques en général, et aux mathématiciens en particulier, de former les mil-liers de techniciens dont nous aurions, paraît-il, besoin de toute urgence pour survivre. Les choses étant ce qu'elles sont, il nous semble que, dans les «grandes» nations sur-développées scientifiquement et techniquement où nous vivons, le premier devoir des mathématiciens serait plutôt de fournir - ce qu'on ne leur demande pas - à savoir des hommes capables de réfléchir par eux-mêmes, de dépister les arguments faux et les phrases ambiguës, et aux yeux desquels la diffusion de la vérité importerait infiniment plus que, par exemple, la télévision planétaire en couleurs et en relief: des hommes libres, et non pas des robots pour technocrates. Il est tristement évident que la meilleure facon de former ces hommes qui nous manquent n'est pas de leur enseigner les sciences mathématiques et physiques, ces branches du savoir où la blenséance consiste, en premier lieu, à faire semblant d'ignorer jusqu'à

l'existence même de problèmes humains, et auxquelles nos sociétés hautement civilisées accordent, ce qui devrait paraître louche, la première place. Mals même en enseignant des Mathématiques, on peut du moins essayer de donner aux gens le goût de la liberté et de la critique, et les habituer à se voir traités en êtres humains doués de la faculté de comprendre».

R. GODEMENT: («Cours d'algèbre - HER-MANN).

In questi nuovi termini, l'insegnamento della matematica non è più fine a sé stesso ma è un insostituibile strumento nella formazione generale di un allievo di scuola media.

1) Nel nostro testo abbiamo sempre usato l'accezione: matematica moderna (talvolta tra virgo-lette). Ci sembra ovvio, visto ciò che abbiamo scritto sopra, che lo facciamo esclusivamente per farci capire e non creare confusione. L'accezione esatta sarebbe: la matematica o la matematiche.

4. A che punto è la riforma?

Ecco brevemente la situazione dell'insegnamento matematico in alcuni tra i più importanti Paesi.

BELGIO

Sotto molti aspetti, il Belgio ha dato l'esempio ad altri paesi. il discorso belga si è sviluppato particolarmente sotto l'impulso del Prof. PAPY, dell'Università libera di Bruxelles, che creò il «centre belge de pédagogie de la Mathématique», responsabile delle ricerche preliminari e della reabilizzazione progressiva della riforma delle scuole secondarie e che, attualmente, dedica la maggior parte degli sforzi all'insegnamento elementare nel quale, nel 1971, è incominciata la generalizzazione di un nuovo programma. Nelle scuole di livello medio e medio-superiore la generalizzazione del nuovo programma data ormai da diversi anni.

GRAN BRETAGNA

Anche qui un nome, Caleb Gattegno, ma, certamente non meno importante anche se sconosciuti, una miriade di altri nomi, in concordanza con l'estesa libera iniziativa didattica concessa in quel paese. Concetto generale è quello di dare grande importanza (senza per questo dimenticare il contenuto matematico) alla metodologia, particolarmente alla motivazione. Una delle iniziative più importanti è il famoso «progetto Nuffield», tradotto anche in italiano dalla Zanichelli.

CANADA'

Il Canadà inglese sente l'influenza degli stati dell'America del Nord; il Canadà Francese (Québec) si inserisce grosso modo nel canale del Colloquio di Royaumont.

La corrente di rinnovamento forse più importante, comunque senz'altro la più appariscente, è quella del Québec, anche per la notevole personalità di Z.P. Dienès, ivi trasferitosi da 7 anni. I lavori di Dienès sono troppo noti a tutti ed è fin troppo riconosciuta l'importanza didattica delle sue opere (tradotte In molte lingue) per parlarne ancora.

U.S.A

In questo paese, in meno di dieci anni, si è avuto un cambiamento radicale che ha avuto inizio dalla presa di coscienza dell'inadeguatezza dell'insegnamento elementare: vari progetti furono preparati da équipes in collaborazione con le grandi università di Harvard, Columbia, Berkeley ecc. Il «National Council of Teachers of Mathematics» ha chiamato, nel 1970, «decade della riforma» il periodo che va dal 1958 al 1969.

FRANCIA

Il movimento riformatore francese è forse il più noto e il più criticato in tutto il mondo. Si è arrivati presto alla generalizzazione del nuovo programma in tutti gli ordini di scuoia, sotto la spinta ecceziona-le dei famosissimi «bourbakisti» (è stato Dieudonné, nel 1959, a Royaumont a lanciare il noto grido «A bas Euclide»). Purtroppo in Francia è stato commesso un errore fondamentale: si sono introdotti programmi nuovi in una scuola con strutture vecchie, senza preoccuparsi di modificarle. Ma sotto la spinta della critica Interna si sta ora cercando di superare le difficoltà.

POLONIA

Con la guida di una personalità di spicco, M.me Zofia Krygowska, matematica e pedagogista, sono state intraprese ricerche interessantissime e variate nell'intento di adattare i programmi al progresso pedagogico: «M.me Krygowska è particolarmente vigile su questo punto: essa rifiuta, giustamente, di prendere sul serio un insegnamento che pretenderebbe di essere moderno perchè usa un vocabolario che sembra esserlo, ma che non corrisponderebbe ad una vera comprensione delle nozioni...» (G. Walusinski - G. Blanc - Pourquoi une mathématique moderne?).

SVIZZERA

Anche in Svizzera il movimento riformatore ha compiuto passi da gigante, soprattutto nei Cantoni romandi: sotto la guida dell'eminente psicologo e epistemologo Jean Piaget (propugnatore dell'«isomorfismo fra le strutture del pensiero e le strutture matematiche»), del matematico Ferdinand Gonseth e di altri, si è arrivati, nei cantoni di Neuchâtel, di Ginevra e in altri, alla generalizzazione quasi totale di nuovi programmi.

Anche nel Ticino da alcuni anni è in corso un'efficace azione di ricerche e di sperimentazioni nelle scuole elementari e nei ginnasi. Alla magistraie è già in vigore un nuovo programma sperimentale e nelle altre scuole superiori si sta procedendo in tal senso. L'anno scolastico 1972-73 segna l'inizio di un timido tentativo di sperimentazione nelle scuole maggiori in vista della scuola media.

IDEE DIRETTRICI

Considerato che oggi è raro trovare un'attività umana completamente estranea al mondo, al pensiero e al linguaggio della matematica, l'insegnamento della stessa non può più essere considerato fine a se stesso ma deve diventare un insostituibile strumento della formazione culturale dell'individuo.

Per assolvere questo compito fondamentale è necessario tenere sempre presente quanto segue:

 Insegnare la matematica non è trasmettere ciecamente catene di definizioni, teoremi e formule nello stretto ordine dello sviluppo storico; è educare al pensiero matematico, inteso come ricerca costante di metodi e tecniche sempre più potenti e raffinati, e di una consapevolezza sempre maggiore dei processi mentali che stanno alla base del ragionamento e del calcolo.

- 2. E' indispensabile che ci si preoccupi delle caratteristiche personali degli allievi affinchè tutti possano raggiungere quel livello del «fare» matematico indispensabile in una società in rapida evoluzione come la nostra.
- 3. La teoria degli insiemi è diventata il fondamento di tutta la matematica di oggi: non si tema dunque che il suo insegnamento sia un salto nel buio, tanto più che la ricerca internazionale ha permesso di raggiungere soluzioni equilibrate, coerenti con le scoperte della psicologia e della pedagogia dell'apprendimento.

OBJETTIVI GENERALI

A. Scopo dell'insegnamento della matematica è di educare l'allievo a:

LIVELLI INFERIORI

- 1. raggiungere la soluzione di problemi dati, considerando che sono problemi anche la ricerca e la memorizzazione degli strumenti necessari alla soluzione del problema stesso;
- 2. ricavare da tale soluzione un tipo (o modello) di ragionamento che possa
- a) essere usato come strumento in altri casi (aspetto operativo),
- b) contribuire alla formazione del pensie ro matematico (aspetto formativo);

LIVELLI SUPERIORI

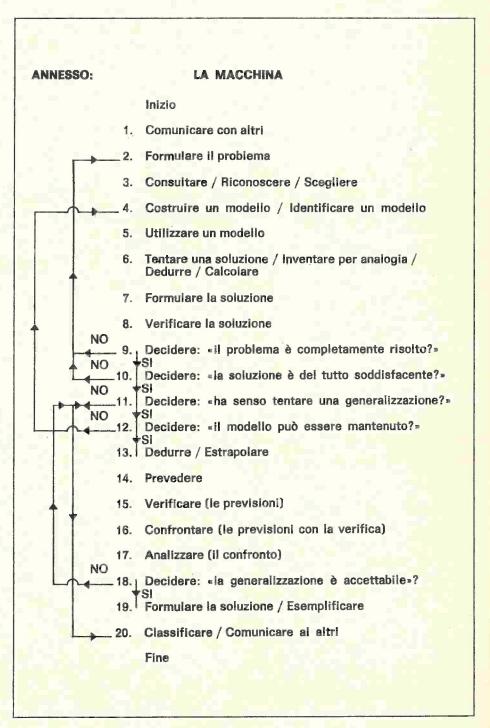
- 3. riconoscere, nell'ambito di una situazione complessa, il problema chiave che la ri solve;
- prendere cosclenza del modo di pensare che ha permesso di svolgere il lavoro descritto nei punti precedenti.
- B. Più analiticamente, l'insegnamento della matematica dovrebbe tendere a esercitare le seguenti attività mentali, messe volutamente in ordine alfabetico:
- analizzare sintetizzare
- calcolare (oralmente, per iscritto, numericamente, algebricamente)
- classificare identificare (cloè stabilire criteri per riconoscere se un determinato oggetto appartiene o no a una data classe - applicare questi criteri)
- comunicare con gli altri
- confrontare
- consultare
- costruire un modello
- dedurre
- esemplificare
- estrapolare
- formulare problemi
- formulare soluzioni
- generalizzare
- inventare per analogia
- prevedere
- riconoscere
- scegliere decidere

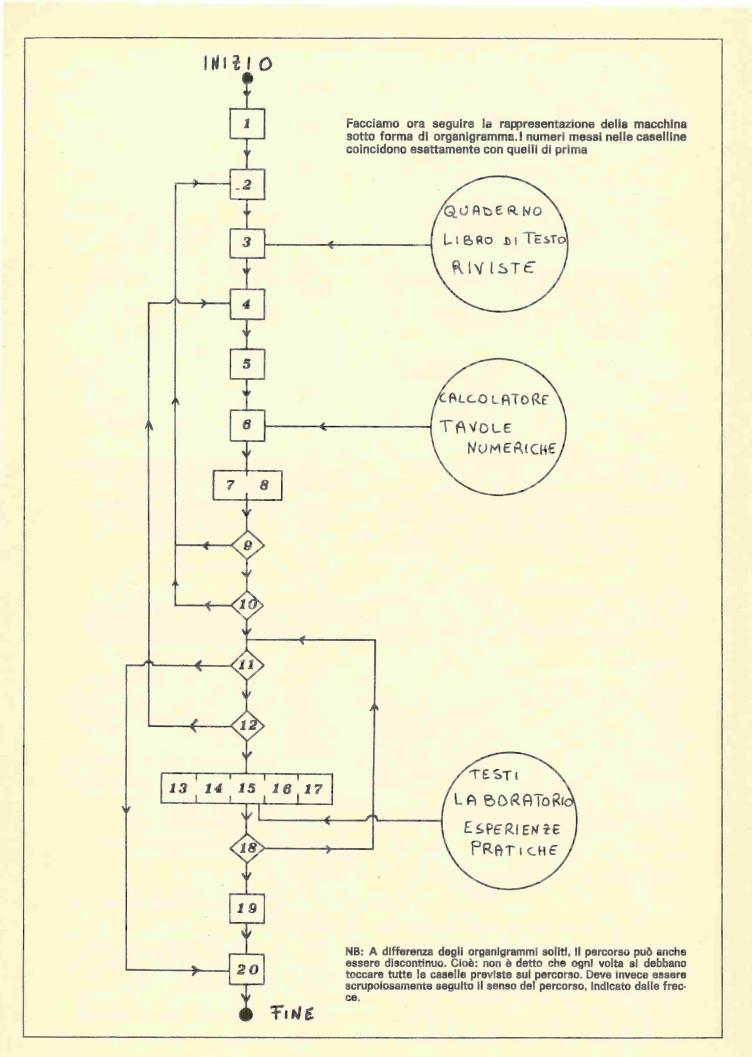
- tentare soluzioni
- --- tollerare situazioni (relativamente) indecidibili
- utilizzare un modello
- verificare
- C. Per raggiungere gli scopi schematizzati in precedenza, e particolarmente i punti 1 e 2 a), proponiamo uno schema di lavoro che chiamiamo macchina. Sia ben chiaro che con la macchina non abbiamo la pretesa di descrivere completamente l'attività matematica, nemmeno quella svolta nella scuola media.

Come nessuna macchina può sostituire l'uomo, così vi sono attività mentali (particolarmente quelle inerenti i livelli superiori dello schema iniziale) che non si possono collocare in uno schema logico sotto forma di organigramma. Comunque la

macchina deve dare all'allievo un metodo di lavoro, che egli stesso, sperimentando continuamente, farà suo, conscio del fatto che dà sempre risultati soddisfacenti e apprezzabili. Assimilato questo metodo di lavoro, il giovane avrà acquisito un modo di pensare matematico, che potrà essergli utile nel contesto sociale nel quale sarà chiamato a vivere e a operare.

Come già detto in precedenza, questo metodo di lavoro dovrà essere conseguito in maniera più o meno marcata da tutti gli allievi che termineranno la scuola media, poiché tocca in massima parte solo i livelli inferiori dell'apprendimento. Gli allievi più dotati assimileranno il metodo di lavoro molto prima degli altri e avranno quindi molto tempo per svolgere attività che toccano particolarmente i livelli superiori.





LA MACCHINA: ESEMPIO DI LAVORO

8

1	4		5
	2		3 5
_			_
		<	9
			8
		ſ	0
	U	_	-
-	6	+	7
[4		5
			3
			2
		<	9
			^
			0
			7
		[6
			5
		1	
			4
			3
		1	
			2
			4

Problema: «tre persone si stringono reciprocamente la mano. Quante strette di mano si hanno in totale?

E se le persone fossero 4? 5?».

Per una formulazione più precisa del problema è necessario specificare la convenzione seguente:

«ogni persona stringe con la sua mano destra la mano destra di ogni altra una sola volta».

E' stato consultato un certo numero di testi che parlano del calcolo combinatorio, ma senza risultato. Su taluni testi il problema è proposto come esercizio, su altri si fanno considerazioni e calcoli troppo difficili e quindi praticamente incomprensibili.

Costruiamo un modello d'indagine, riconoscendo valido il metodo di rappresentazione delle relazioni, con frecce.

Siano A, B, C le tre persone, la relazione è «stringe la mano a». La rappresentazione grafica è la seguente:



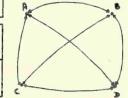
Ora è necessario specificare ancora cosa si intende per «stretta di mano»: una singola freccia o un doppio legame?

Due sono i tentativi di soluzione: contare le frecce o i doppi legami. !! risultato è pure duplice: «3» o «6».

Tre allievi si tringono la mano reciprocamente. Essi vedono che quando Alberto stringe la mano a Bruno, anche Bruno la stringe ad Alberto. Questo ci fa dire che il risultato (quindi la soluzione) accettabile è «3».

Il problema non è completamente risolto.

Proviamo con 4 persone. Adoperiamo lo stesso modello.



Riferendoci alla nuova situazione, vediamo che il nostro metodo di soluzione ci porta a trovare il risultato: strette di mano «6».

La verifica conferma il nostro risultato.

Il problema non è completamente risolto.

Proviamo con 5 persone. Adoperiamo lo stesso

«10».

modello.

Riferendoci alla nuova situazione, ricaviamo il risultato seguente: strette di mano: La verifica conferma il risultato trovato.

9 Il problema è completamente risolto.

10 La soluzione è del tutto soddisfacente.

Ha senso tentare una generalizzazione. «Come si potrà esprimere con una formula matematica il numero di strette di mano con n persone?

Decidiamo di mantenere lo stesso modello d'indagine.

Sia S_n il numero di strette possibili fra n persone.



Ci troviamo nei pasticci, perchè il nostro modello funziona solo se si conosce il numero di persone, non in generale.

Non possiamo esprimere S_n , quindi la generalizzazione così come l'abbiamo affrontata non è possibile.

Tuttavia restiamo dell'opinione che ha senso tentare la generalizzazione, che ci permetta di scrivere una formula per S_n.

Dobbiamo perciò cambiare modello di ragionamento.

Tentiamo nel modo seguente. Ammesso di conoscere S_{n-1}, aggiungendo una n-esima, persona, quante strette di mano si hanno in più?

Rana Ra

5

13

17

18

S25?

16

L'n-sima persona An stringe la mano ad ognuna delle (n-1) persone di prima.

Si trova, cioè, la formula: $S_n = S_{n-1} + (n-1)$.

Verifichiamo questa formula con i casi già calcolati: $S_3 = 1 + 2 = 3$, sì!, $S_4 = 3 + 3 = 6$, sì!,

53 = 1 + 2 = 3, sit, 54 = 3 + 3 = 6, sit $S_5 = 6 + 4 = 10$, sit $S_6 = 10$ L'analisi del confronto dà risultati positivi.

Tuttavia la formula trovata è scomoda. Che lavoro dobbiamo fare per calcolare ad esempio

Non accettiamo questa generalizzazione, e tentiamo di raggiungere una formula che ci permetta di calcolare S_n , senza essere obbligati a conoscere altri S_k .

Rifiutiamo il modello appena trovato.



Diciamo allora che ogni persona (delle n in gioco) realizza (n-1) strette di mano, con le altre (n-1) persone.

Tenendo conto di calcolare «uno» ogni doppio le game, troviamo la formula:

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_2 = \frac{2.1}{2} = 1$$
, $S_3 = \frac{3.2}{2} = 3$,

$$=\frac{3.2}{2}=3$$
,

$$S_4 = \frac{4.3}{2}, \dots$$

16 17

L'analisi del confronto dà risultati positivi.



La generalizzazione è accettablle.



Se n persone vogliono salutarsi stringendosi la mano reciprocamente e con ognuna esattamente una volta, si verificano Sn strette di mano, dove Sn è espresso dalla formula:

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Per esempio, se i nostri 5 consiglieri di Stato si salutassero nel modo descritto, alla fine di ogni loro riunione, si verificherebbero ogni volta:

$$S_5 = \frac{5(5-1)}{2} = 10$$
 10 strette di mano.



Prima di classificare questo risultato, vogliamo renderlo più usablle. Non a tutti interesserà il problema delle strette di mano!...

Ci domandiamo in quali altre situazioni può servire la soluzione trovata.

Guardando i diagrammi con frecce fatti nel corso della soluzione possiamo dire per esempio che Sn è anche il numero totale di lati e diagonali di un poligono di n lati. Se interessasse il numero delle diagonali, basterebbe procedere nel modo

$$d_n = S_n - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ritenlamo tuttavia che questi non siano i soli problemi risolvibili con la formula (o le formule)

Sarà nostra premura ricordare il metodo d'indagine usato, perchè si è rivelato buono.

Dal punto di vista strettamente rigoroso, abbiamo giustificato completamente la nostra formula?

Il ragionamento usato non ci convince del tutto, pur essendo corretto, perché si basa su una situazione concreta e sperimentabile praticamente. Ma se la situazione cambiasse, fin dove potremo ancora essere sicuri della rigorosità del nostro operato?

Un'analisi più approfondita del nostro modo di procedere, ci porta a fissare alcuni dati sicuri, sui quali possiamo costruire un ragionamento rigoroso.

2)
$$S_n = S_{n1} + (n-1)$$
 (*)
CARATTERISTICA DEL
PROCESSO

In base a ciò, vediamo di giustificare la nostra formula:

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

1)
$$S_1 = \frac{1 \cdot (1-1)}{2} = 0$$
, per n=1, funziona!

2) Ammettiamo che sia
$$S_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
, allora

$$S_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2 + 2n - 2}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Osserviamo perciò che se la nostra formula va bene per un numero naturale qualsiasi, essa va pure bene per il suo successivo. Ma la formula funziona già per n = 1, quindi varrà anche per n=2, ma allora anche per n=3, ... per tutti gli n naturali = 0

Schema del ragionamento (di ricorrenza):



Ha senso chiedersi se la formula vale anche per n = 0?

Si otterrebbe:
$$S_0 = \frac{0 (0-1)}{2} = 0$$
, accettabile!

Conclusione: la formula è applicabile a tutte le situazioni caratterizzabili con i punti 1) e 2) in (°); il processo di dimostrazione è a sua volta applicabile a tutte le situazioni che si possono caratterizzare in modo analogo.

Osservazione finale: si noti che per il lavoro di riflessione sul procedimento dell'indagine matematica la macchina non è più sufficiente. Esso appartiene ai livelli superiori di apprendimento del pensiero matematico (3, e 4, scopo dell'insegnamento della matematica).

FINE

CONTENUTI DELL'INSEGNAMENTO

Fermo restando il discorso fatto finora, ri teniamo importante, per la matematica intesa come materia d'insegnamento, precisare i contenuti dell'insegnamento nella scuola media.

I. Biennio

L'attività didattica nel primo biennio ha carattere essenzialmente operativo e di esperienza concreta: essa deve permettere di costruire gradualmente, nel limite del possibile, le tecniche, i concetti e i modelli per l'uso negli anni successivi. Possiamo raggruppare i temi da affrontare nel primo biennio:

1. Messa a punto e approfondimento delle

conoscenze di aritmetica e geometria apprese nella scuola elementare.

2. Concetti di insieme e di relazione.

3. Studio di argomenti di algebra e geometria in cui vengono utilizzati i concetti presentati nei punti 1. e 2.

1. Messa a punto e approfondimento delle conoscenze di aritmetica e geometria apprese nella scuola elementare, ad esempio:

- giustificazione delle tecniche di calcolo nell'insieme N lavorando sulle proprietà delle operazioni

- sistemi di numerazione e sistema metrico decimale

- divisibilità

- calcolo dell'area delle figure piane e introduzione al calcolo del volumi

2. I concetti di insieme e di relazione:

- insieme di oggetti (ad esempio blocchi logici)

- insieme di numeri

- insieme di punti e insieme di figure - le operazioni con gli insiemi (intersezione, unione, prodotto cartesiano)

- relazioni semplici e loro diverse rappresentazioni

- relazioni di equivalenza (eventualmente d'ordine)

applicazioni biunivoche

- simmetrie

- funzione lineare

- primi contatti con statistiche

3. Studio di argomenti di algebra e geome-

tria in cui vengono utilizzati i concetti presentati nei punti 1 e 2:

- primo contatto con gli insiemi Z e Q +
 rappresentazione sulla retta orientata,
 operazioni
- calcolo letterale
- proporzionalità e problemi relativi
- teorema di Pitagora e sue applicazioni
- spostamenti nel piano (traslazioni, simmetrie, rotazioni)
- idea di invariante rispetto a una trasformazione geometrica: le trasformazioni topologiche come caso molto generale

 proprietà invarianti di alcune figure

Il Biennio

piane.

Nel secondo biennio si utilizzano e precisano tecniche, concetti e modelli costruiti nel corso del primo biennio.

l contenuti specifici di questo corso possono essere suddivisi in quattro grandi temi:

- Continuazione dello studio degli insiemi numerici
- Ripresa del lavoro con relazioni, funzioni, applicazioni
- 3. Geometria del piano considerato come insieme di punti
- 4. Strutture.
- 1. Continuazione dello studio degli insiemi numerici:
- ripresa e approfondimento degli insiemi Z e Q+
- studio degli insiemi Q e R; loro struttu-
- calcolo letterale, potenze, radici e logaritmi.
- 2. Ripresa del lavoro con relazioni, funzioni, applicazioni:
- equazioni e disequazioni di primo grado
- risoluzione grafica di equazioni
- composizione di applicazioni biunivoche
- funzioni razionali in R e loro composi-
- equazioni e disequazioni riducibili al primo grado
- primi elementi di statistica descrittiva e di calcolo combinatorio.
- 3. Geometria del plano considerato come insieme di punti:
- ripresa della simmetria assiale e sue proprietà
- composizione di simmetrie assiali: rotazioni, traslazioni, isometrie.
- figure congruenti
- omotetie e similitudini
- classificazione delle trasformazioni geometriche.

4. Strutture

Nel trattare i diversi argomenti si dovranno mettere in evidenza le strutture fondamentali e in particolare quella di gruppo. Si può in particolare incontrare la struttura di gruppo lavorando sui seguenti argomenti:

- trasformazioni di oggetti (forme e colori)
- numeri
- trasformazioni geometriche
- permutazioni
- insiemi.

METODOLOGIA

Nota: Il testo seguente rappresenta un primo approccio ai problemi metodologici; il gruppo si riserva di ampliarlo e completarlo successivamente fornendo, in particolare, esempi concreti sul modo di condurre le lezioni e sul tipo di schede occorrenti per introdurre le «attività libere» proposte.

Il gruppo di matematica propone decisamente che il processo di apprendimento si svolga **interamente** nel tempo di scuola per tutti gli insegnamenti.

Nel caso particolare della nostra materia, le ore di lezione vera e propria (cioè quelle dedicate alla presentazione e alla discussione in comune di argomenti del programma) costituiscono solo il 40%, o meno, delle ore a disposizione. Nel tempo rimanente il docente organizza un'attività libera. L'allievo riceve una serie di esercizi sulla materia svolta in modo da poterla studiare e completare; può consultare libri per approfondire il suo sapere, discutere con l'insegnante su questioni particolari non ben capite, spiegare un concetto a un compagno, farsi spiegare un concetto da un compagno, affrontare esercizi che richiedono doti particolari a seconda delparticolare l'inclinazione della sua personalità: ecc.

Si noti che per un lavoro del genere l'unica difficoltà (del resto non trascurabile) è quella di redigere schede di lavoro (I testi degli esercizi) adatte. Esse devono contenere lavori di difficoltà graduata (dai più facili ai più difficili), pensati sia per l'allievo debole, sia per quello dotato. Ogni esercizio dovrà offrire all'allievo la possibilità di esercitare il metodo di lavoro descritto con la «macchina». Esercizi particolari permetteranno all'allievo capace di raggiungere i livelli superiori dell'apprendimento.

Gli allievi sono liberi, di volta in volta, di lavorare individualmente, a coppie o a gruppi più numerosi.

L'insegnante, oltre che essere a disposizione di tutti, interviene quando lo ritiene opportuno e si preoccupa sempre di raccogliere il massimo numero di osservazioni sui comportamento dei singoli allievi o di determinati gruppi:

Tramite questa osservazione, discreta ma continua, l'insegnante può rendersi conto delle capacità, del rendimento e delle inclinazioni personali di ogni singolo allievo.

E ciò in misura molto migliore di quel che potrebbe ricavarne da prove in classe, test e interrogazioni.

La lezione di tipo frontale dovrebbe perciò essere ridotta al minimo indispensabile, con l'unico scopo di dare agli allievi un'idea generale sull'argomento in questione. Non si perderà più tempo ripetendo continuamente per chi non capisce subito: quelli che incontrano difficoltà hanno la possibilità di riflettere con calma, di farsi rispiegare, di consultare testi e di esercitarsi durante le ore di attività libera. In questo modo si possono svolgere attività di apprendimento sufficientemente per-

sonalizzate, senza dover smembrare le classi.

Naturalmente questo modo di far scuola può ulteriormente evolvere. Certi allievi non seguiranno più nessuna lezione, ma avranno unicamente un'attività libera molto estesa. Saranno evidentemente i più dotati e assimileranno la formazione matematica di base in poco tempo. Grazie al metodo di lavoro assimilato saranno in grado di studiare argomenti nuovi.

Altri allievi alterneranno lezione ad attività libere: essi costituiranno la maggioranza e potranno apprendere il modo di pensare matematico solo verso la fine della scuola media; avranno comunque conoscenze sufficienti per affrontare qualsiasi curricolo di studi.

Rimarrà forse un gruppo di allievi che non riuscirà a svolgere un'attività libera sufficientemente proficua e che per forza di cose dovrà essere seguito costantemente dal docente. Si veda nell'Introduzione (Scuola ticinese 1973, nro 1) la discussione sulla problematica posta dagli allievi meno dotati.

L'attività di osservazione e di valutazione dell'allievo tende a rilevare:

- le capacità
- il rendimento
- le inclinazioni personali
- i problemi psicologici che possono influenzare il comportamento a scuola.

Come già detto la valutazione dovrebbe essere fatta in modo continuo, osservando gli allievi nell'attività libera. Certo che l'insegnante, durante queste ore, e quando ne sente il bisogno, può intervenire e stabilire un colloquio con un allievo passando da osservatore discreto a osservatore attivo. Non sono escluse prove individuali, come si son sempre fatte; tuttavia esse dovrebbero avere un'influenza secondaria sul giudizio globale.

MEZZI DIDATTICI

E' auspicabile avere a disposizione un calcolatore da tavolo programmabile in ogni sede, per continuare l'ottima esperienza iniziata nel ginnasio.

L'attività con il calcolatore dovrebbe svolgersi in forma facoltativa ed inserirsi nel corsi opzionali.

Per quanto riguarda i mezzi didattici più «normali» si chiede che vengano messi a disposizione degli allievi blocchi logici e materiale strutturato, per rendere più interessante l'attività operativa, nel primo biennio.

Orientativamente, la richiesta verte sui seguenti materiali:

- BLOCCHI LOGICI
- almeno 1 scatola o busta ogni 2 allievi;
- GEOPIANO (eventualmente)
 almeno 1 ogni 4 allievi.

Sarebbe interessante poter disporre, almeno a titolo sperimentale, per il primo biennio, di calcolatrici da tavolo (3 o 4 per classe) del tipo meno automatizzato possibile, per agevolare l'esercitazione al calcolo e l'assimilazione delle proprietà delle operazioni aritmetiche.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Opere indispensabili per un primo approccio alla

matematica moderna.

JOHNSON-GLENN, insiemi ed operazioni, Zaniserie M, 1969.

NORTON, Sistemi matematici finiti, Zanichelli, serie M. 1969.

CALAME, Introduction aux mahématiques moder-

CALAME, Introduction aux mehematiques modernes, Editions du Griffon, Neuchâtel, 1971.
FADINI-SCONAMIGLIO, Orientamenti della metematica moderna, Mursia, 1969.
DUVERT, GAUTHIER, GLAYMANN, Laveri pratici di matematica, Serie I: gli insiemi, 1969. Serie II: le relazioni, 1970. Serie III: le leggi di composizione, 1971. Serie IV: strutture: i) I Gruppi, 1972, Edizioni O/S, Firenze.

ALTRE OPERE ESSENZIALI

AUTORI VARI (a cura di M. Villa), Matematica moderne, *** nelle scuole secondarie superiori, 1966; */** nelle scuole secondarie inferiori, 1968,

Patron, Bologna.
CALAME, */** Mathématique moderne I, 1965;
** Mathématique moderne II, 1966; ** Matematique moderne III, 1967, Editions du Griffon,

CARUCCIO, ** Mondi della logica, 1971, Zani-chelli, serie M.M.

CASTELNUOVO, * Didattica della matematica, La nuova Italia, 1963.
CORNE-ROBINEAU, * Les mathématiques nouvei-

les (dans votre vie quotidienne), Casterman/Poche, 1970.

matematica, DIENES, * Costruiamo la *Logica e giochi logici, 1968; *II potere della matematica, 1969, Edizioni O/S, Firenze. DIENES, */** Uno studio sperimentale sull'ap-prendimento della matematica, Feltrinelli, Milano,

DONEDDU, *** Aritmetica generale, Feltrinelli,

Milano, 1967.
FADINI, ** Introduzione alla teoria degli insiemi
e alla logica matematica, Edizioni 1.E.M., Napoli, 1969.

FRAJESE, * La matematica del maestro, La Scuola, Brescia, 1969.

FRAJESE, * introduzione elementare alla matematica moderna, Le Monnier, Firenze, 1968. GLAYMANN, * Introduzione al calcolo numerico (prima media), Edizione O/S, Firenze.

GLENN-JOHNSON, * Sistemi di numerazione, Zanichelli, serle M.

GROSSMAN-MAGNUS, **! gruppi e i loro grafi,

JANDOT, * Libro dell'Insegnante, 1970; * Schede di levoro, 1970, Edizioni O/S, Firanze.

KAUFMANN, Des points et des flèches... la théorie des graphes, Dunod (Coll. Science-Poche),

Paris, 1968. LOMBARDO-RADICE, CATALANO, * Minialgebra, Feitrinelli, 1972. NORTON, * Introduzione ai vettori, Zanichelli,

NORTON,

serie M.
PAPY, *** I gruppi, Feltrinelli, Milano, 1964.
PIAGET, CHOQUET, GATTEGNO, DIEUDONNE, LICHNEROWICZ, ** L'insegnamente della matematica, La nuova Italia, Firenza, 1960.

REVUZ, * Matematica moderna, matematica viva,

Armando, Roma, 1965. RINALDI-CARINI ROSA, *Le relazioni e la ma-tematica nella scuela dell'ebbligo, Zanichelli,

SPERANZA, ** Relazioni e strutture, 1970, Zani-

chelli, serie M.M.
VIOLA, *** Introduzione alla teoria degii insiemi, Brodighleri, Torino, 1964.

NB: ****; ***; **; *

Livelli di difficoltà dal più al meno elevato.

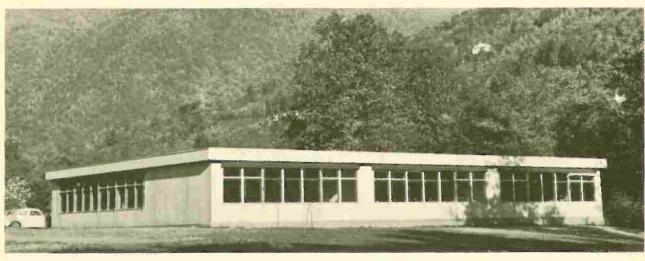
società elettrica sopracenerina sa locarno



8630 Rüti ZH Tel. 055-312844

mobilio scolastico

Rappresentante: C. Gervasoni 6900 Massagno-Lugano Tel. 091-98375 priv. 091-33030



Scuola consortile Bedigliora

Poinorm via Landriani 7 Lugano © 091-37745



Progettazione ed esecuzione di costruzioni razionalizzate per l'edilizia e il genio civile

Abbiamo realizzato: Ginnasio di Agno Ginnasio di Locarno-Solduno