La matematica attraverso il teatro: Leonhard Euler:... e tre!

Oggi sempre più spesso si sente dire che tutto è spettacolo. Sentiamo parlare di giornalismo-spettacolo, di giustizia-spettacolo, di politica- spettacolo e persino di guerra-spettacolo. Mancava solo la matematica-spettacolo, dirà qualcuno! Vediamo di puntualizzare. Noi non abbiamo voluto colmare questa lacuna! Il nostro progetto vuole essere qualcosa di più serio, non vuole inserirsi in questo filone, né tanto meno rincorrere una moda.

Nato da un'idea maturata nell'ambito scolastico e rispondente ad un bisogno reale di rinnovamento oggi avvertito in termini sempre più pressanti e indilazionabili, il progetto di storia della matematica attraverso il teatro intende proporre un nuovo approccio alla matematica, vista nella dimensione storico-culturale e vissuta nella finzione teatrale. Siamo lontani quindi dal voler offrire allo spettacolo – oggi in crisi nelle sue forme tradizionali – nuovo materiale o nuovi campi di indagine e neppure nuovi «effetti speciali». Il nostro è un progetto che è nato come sperimentazione didattica e che tale vuole rimanere. La domanda alla quale abbiamo cercato di rispondere non è quindi «Si può fare dello spettacolo attraverso la matematica?», ma semmai «Si può fare della matematica attraverso il teatro?».

Il lavoro messo in cantiere quest'anno (o, per essere più precisi, messo in cantiere un paio di anni fa, ma concluso e messo in scena quest'anno) consiste in una nuova esperienza di didattica della matematica attraverso il teatro, avente per oggetto la figura di Leonhard Euler. Chi sia stato Leonhard Euler, supponiamo sia noto a tutti almeno per due buone ragioni. La prima è che si tratta di uno dei massimi esponenti della storia della matematica, emblematico prodotto di quel magico momento della cultura umana che fu l'Illuminismo. La seconda ragione è che si tratta di un eminente connazionale e quindi è doveroso da parte nostra conoscerlo un po' più da vicino.

A grandi linee (lo preciso per chi non avesse seguito il progetto fin dalle sue prime mosse) l'esperienza storico-matematico-teatrale si innesta nel processo di riforma che la Scuola sta mettendo in atto per uscire da una situazione di stallo, che non soddisfa né docenti, né allievi e tanto meno la società e il mondo del lavoro. E' così che già dal lontano 1994 con il progetto «Cartesio» si è tentata una via pressoché inesplorata, quella di far passare la matematica – o meglio la storia della matematica – attraverso il teatro. Il «matrimonio» è riuscito in modo più che soddisfacente. Si sono avute delle incomprensioni (= difficoltà di adattamento reciproco, specie da parte della matematica, i cui protagonisti non sempre si «adattano» alla rappresentazione scenica), ma il connubio ha dato vita a una prole sana e vivace: un lavoro nel 1994 (quello su Cartesio), uno nel 1996 (Cardano) e questo su Euler.

Noi tutti del gruppo di lavoro matematico-teatrale siamo convinti che questo progetto di storicizzazione e umanizzazione della matematica possa dischiudere orizzonti sicuramente promettenti. Del resto, si è detto più volte che si tratta di un possibile sbocco, una delle tante vie d'uscita percorribili. L'importante, per noi, è soprattutto l'aver sollevato la questione, l'aver, come si suol dire, agitato le acque e l'essere riusciti a coinvolgere o addirittura ad appassionare i giovani. La soluzione in sé non è ciò che più ci preme, così come siamo consapevoli dei limiti «artistici» dei lavori realizzati. Non bisogna però dimenticare che sia i docenti sia gli allievi erano tutti alle prime esperienze come registi, scenografi o attori. A noi interessava la proposta nei suoi contenuti innovativi.

I punti qualificanti di tale progetto si possono così sintetizzare ed enunciare:

1. L'aver sostituito alla matematica dei numeri la matematica degli uomini e delle idee.
2. L'aver restituito all'allievo quel ruolo di centralità nel processo di apprendimento.
3. L'aver coinvolto l'allievo – al punto da appassionarlo – alla realizzazione di un progetto (non è frequente oggi vedere l'allievo andare volentieri a scuola, sia pure per attività non strettamente curricolari).
4. L'aver individuato in alcuni discenti insospettati dote recitative o scenografiche o compositive (con gli strumenti della scuola tradizionale, non sempre ciò è possibile).
5. L'aver gettato luce su un matematico che meritava di essere riscoperto.
6. L'aver sperimentato un nuovo rapporto docenti-alunni e l'aver fatto assaporare a questi ultimi il gusto della realizzazione di un loro lavoro che veniva messo in scena e pubblicato.

Se questi obiettivi sono stati in parte o in «toto» raggiunti ci sembra che il progetto abbia sostanzialmente conseguito lo scopo per cui era stato messo in atto. Non sta a noi, che siamo gli organizzatori, quindi parte in causa, esprimere giudizi di merito, ma non possiamo non segnalare le numerose attestazioni di simpatia e solidarietà che in varie forme hanno accompagnato fin dai suoi inizi lo sviluppo del progetto. E tutto ciò significa qualcosa...

Ma veniamo a Leonhard Euler e sentiamo come egli si presenta con le sue parole (tratte dall'autobiografia dettata al figlio Johann Albrecht, in quanto l'anziano matematico era divenuto cieco): *«Io, Leonhard Euler, sono nato nell'anno 1707 il 15 aprile del calendario nuovo a Basilea. Mio padre era Paulus Euler, mia madre si chiamava Margaretha Bruckerin. I miei genitori si stabilirono poco dopo nel comune di Riechen, situato ad un'ora a piedi da Basilea, dove mio padre era stato nominato parroco.*

Qui ricevetti i primi rudimenti dell'istruzione da mio padre, che, essendo stato discepolo del famoso Jacobi Bernoulli, volle trasmettermi fin da giovanissimo i fondamenti della matematica, usando a tale scopo come testo il manuale di Coss con le annotazioni di Michaels Stiefels (che era il testo di «Algebra» di Christophs Rudolphs del 1525 opportunamente rifatto). Con questo testo mi esercitai per alcuni anni. Più tardi, per potere studiare scienze umane, mi trasferii presso mia nonna a Basilea, dove frequentai il ginnasio e contemporaneamente perfezionai le mie conoscenze matematiche prendendo delle lezioni private.

Nel 1720 entrai all'Università e ben presto conobbi il famoso professore Johanni Bernoulli, che si prodigò per aiutarmi. Non potendo però impartirmi personalmente delle lezioni priva-

te, mi consigliò di leggere e studiare da solo dei testi piuttosto complicati. Poi ogni sabato sera avevo libero accesso presso la sua abitazione ed egli in quell'occasione mi aiutava ad appianare tutte le difficoltà che avevo incontrato durante la settimana di studio. Poiché ogni dubbio eliminato mi permetteva di chiarirne di colpo altri dieci, penso che questo sia stato il metodo migliore per compiere significativi progressi in matematica. Nel 1723 ad un anno e mezzo dal conseguimento della laurea venni promosso «Magister».

Successivamente, spinto dalla mia famiglia, dovetti iscrivermi alla facoltà di teologia e applicarmi anche allo studio delle lingue greca ed ebraica. Non feci tuttavia molti progressi su questo terreno, poiché mi dedicai maggiormente alla matematica favorito anche dalla fortunata opportunità di poter continuare a frequentare la casa del professore Johanni Bernoulli.

In quegli anni era stata fondata la nuova Accademia delle scienze di San Pietroburgo, alla quale furono invitati come insegnanti nel 1725 i figli di Bernoulli, e ciò fece nascere in me il desiderio di recarmi a San Pietroburgo. I Bernoulli mi promisero che avrebbero fatto tutto il possibile per procurarmi un impiego onorevole in quella città e la promessa fu mantenuta perché mi trovarono un posto che mi avrebbe permesso di applicare le mie conoscenze matematiche alla medicina. L'allettante proposta mi giunse solo all'inizio dell'inverno del 1726 ma decisi di rinviare la partenza alla primavera successiva. Nel frattempo mi immatricolai alla facoltà di medicina di Basilea e partecipai senza esito anche al concorso per il posto vacante alla cattedra di fisica presentando uno studio sul suono. Giunta la primavera del 1727, lasciai Basilea all'inizio di aprile e arrivai a Lubecca troppo in anticipo per trovare una nave diretta a San Pietroburgo. Presi allora una nave fino a Reval, poi un'altra fino a Cronstadt. Arrivai a destinazione lo stesso giorno della morte della zarina Caterina I e trovai quindi l'Accademia in grande agitazione e costernazione. Ebbi tuttavia il piacere di incontrare, oltre a Daniel Bernoulli (il fratello Nicolaus era nel frattempo morto), il prof. Hermann, un lontano mio parente, il quale mi aiutò in tutti i modi. Il mio salario era di 300 rubli ma in compenso ero esentato dal pagare l'abitazione, la legna per il riscaldamento e la luce. Viste la mie specifiche competenze per la matematica, venni nominato aggiunto «Matheseos sublimioris»; in tal modo decadde la iniziale promessa di un insegnamento inerente la medicina.

Mi venne offerta nel contempo l'opportunità di partecipare liberamente alle riunioni accademiche ed esporre in quelle occasioni le mie ricerche e i miei studi matematici. Nel 1730 i professori Hermann e Bilfinger ritornarono nei loro paesi di origine e io venni designato professore di fisica al posto di quest'ultimo. Il contratto fu stipulato per quattro anni con un salario di 400 rubli nel primo biennio e 600 rubli (più 60 rubli per l'alloggio, la legna e la luce) nel secondo. Sposai Catherina Gsell nel Natale del 1733. Siccome in questo stesso periodo anche il professore Daniel Bernoulli aveva fatto ritorno in patria, venni designato pure professore «Matheseos sublimioris» e successivamente assunsi l'incarico di supervisore del dipartimento geografico assegnatomi dal senato accademico. Per tutte queste incombenze il mio salario fu portato a 1200 rubli.

Nel 1740, dopo la morte dalla zarina Anna, le cose cominciarono a cambiare e a prendere una brutta piega, in quanto si instaurò un malgoverno che mi spinse ad accettare senza esitazione un incarico a Berlino. Trasferitomi colà, sua Maestà il re di Prussia mi offrì un salario di 1600 talleri. Ciò che accadde dopo è ormai noto a tutti».

Leonhard Euler

Al di là di questa confidenziale presentazione, la scelta di Euler ha sollevato in noi delle perplessità iniziali, dovute principalmente alla scarsa «vivacità» del personaggio che non offriva molti spunti alla drammatizzazione. Intuendo tuttavia il suo spessore, non ci siamo voluti arrendere alle prime difficoltà e anzi proprio in questa apparente «povertà» abbiamo scoperto la sua vera ricchezza: la semplicità e il tenace attaccamento a solidi principi. Da qui abbiamo mosso la nostra ricerca, ispirandoci più che alla figura reale o storica di Euler, a ciò che egli rappresentò nel suo tempo e potrebbe rappresentare in futuro.

Abbiamo così individuato tre valori tra quelli che più stavano a cuore ad Euler, li abbiamo visti realizzati nel suo tempo e abbiamo cercato di immaginarne la proiezione nel lontano 2289. Quali sono questi valori? La libertà, la famiglia e la scienza (soprattutto i primi due). Il lavoro ha assunto perciò una fisionomia molto particolare, è diventato storico-futurista. Si è reso necessario trovare però una sorta di «alter ego» per Euler e la scelta è caduta su un ipotetico suo discendente, cui si è dato il nome di NON (si tratta dell'iniziale di una sigla, visto che si è supposto che nel futuro i nomi e i cognomi verranno sostituiti da sigle convenzionali con lettere e numeri, tendenza, del resto, già in atto). Il dialogo «virtuale» Euler-NON si è rivelato così un immaginario confronto passato/futuro, ovvero tra ciò che è stato (e in gran parte è tuttora) e ciò che sarà. Ne sono scaturiti situazioni e interrogativi indubbiamente stimolanti, del tipo dove va la libertà, verso un ulteriore appiattimento e conformismo (come molte espressioni oggi fanno temere) o verso un'imprevedibile ma auspicabile svolta nella direzione di un nuovo umanesimo, che valorizzi la diversità? Si è infatti notato che la libertà mal si concilia con l'uguaglianza, ma piuttosto con la piena affermazione di sé. Interessanti sono anche i possibili sviluppi di quella antica e gloriosa istituzione che è la famiglia. Abbiamo cercato, sul filo di una scherzosa proiezione futuristica, di indovinarne l'evoluzione di qui a quasi trecento anni. E' chiaro che non si è trattato di una rigorosa ricerca sociologica, fondata sui dati e sulle tendenze attuali, ma di una ideale situazione della famiglia del futuro, frutto di un'operazione di «fantasia realistica».

Sia nella prima direzione (quella della libertà/diversità), sia nella seconda (quella della famiglia), siamo

pervenuti a proposte volutamente provocatorie, tali da suscitare un dibattito più che da offrire concrete soluzioni.
Come già avvenuto per i lavori precedenti, anche in appendice a questo sono stati proposti, nell'ambito del laboratorio di matematica, interessanti questioni e problemi matematici, inerenti ai campi di indagini degli autori trattati.
Vi proponiamo il seguente a titolo esemplificativo:

π=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582 09…

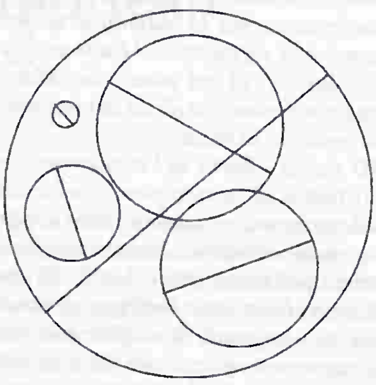
Un numero straordinario che affascina tutti i matematici (ma non solo) e di cui nessuna civiltà può ignorarne l'esistenza.
Non c'è dubbio che una delle figure geometriche più semplici e più diffuse nel mondo è il cerchio. Mentre riusciamo facilmente a tracciare un cerchio (basta munirsi di compasso), per disegnare una qualsiasi altra curva geometrica siamo obbligati a misurare e a calcolare. Alcune lunghezze non razionali si possono ottenere partendo da un cerchio.

Ecco alcuni esempi.

• *1) Costruire rigorosamente un quadrato di lato $5\sqrt{2}$ cm.*
Basta ricordare che la diagonale del quadrato inscritto in un cerchio è uguale a _________. Di conseguenza il cerchio circoscritto al nostro quadrato ha raggio_________. Con riga e compasso puoi disegnare il quadrato richiesto.

• *2) Costruisci un triangolo equilatero di lato $5\sqrt{3}$ cm. La strategia è analoga a quella usata in precedenza.*

Pare che i primi segni che attestano la conoscenza della costanza del rapporto tra la circonferenza e il suo diametro risalgano intorno all'anno 1650 a.C. e sono contenuti nel famoso papiro di Rhind. Ma stranamente a questo rapporto, sino al 1700, non è mai stato dato né un nome né un simbolo. Si deve a Leonhard Euler il merito di aver divulgato l'uso della notazione π (usato per la prima volta da J. William in uno scritto del 1706) per individuare questo rapporto.



$$\frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} = \pi$$

A proposito del valore numerico di questo rapporto, gli egizi consideravano già per π il valore di 256/81 = 3,1605, mentre nell'Antico Testamento si dice esplicitamente che il suo valore è uguale a 3. Archimede (III secolo a.C.) usa un poligono di 96 lati per stabilire che $3\,{}^{10}/_{71} < \pi < 3\,{}^{1}/_{7}$, e Tolomeo (II secolo d.C.) trova π = 377/120 = 3,14166…
Nel 1579 Viète calcola le prime 10 cifre decimali esatte di π. Nel 1593 tale Romanus trova le prime 16 cifre esatte di π, nel 16 10 van Ceulen ne dà 33 e nel 1621 Snell arriva a 35 cifre decimali esatte.
Newton attraverso il calcolo infinitesimale da lui avviato calcola le prime 16 cifre decimali. Euler intorno al 1750 calcola π attraverso una serie di arcotangenti. Nel 1761 J. Lambert dimostra che π è un numero irrazionale (numero decimale illimitato le cui cifre non sono periodiche). Alcuni anni dopo si intuisce che π è un numero trascendente e effettivamente più di un secolo dopo (1882) F. Lindemann dimostra che π è un numero trascendente (ovvero che non può essere soluzione di una equazione algebrica con un numero finito di termini e con coefficienti razionali). Ciò permise di dimostrare anche l'impossibilità di risolvere l'antico problema della quadratura del cerchio, cioè è impossibile costruire usando riga e compasso un quadrato la cui area sia uguale a quella di un cerchio dato.
Dopo la dimostrazione di Lindemann il calcolo di π subì una battuta d'arresto ma l'avvento dei calcolatori portò dal 1950 in poi ad un rinnovato studio (statistico) delle cifre di π. Oggi si conoscono più di 50 miliardi di cifre decimali di π.

Vediamo insieme come Archimede più di 2000 anni fa pervenne ad un valore di π esatto fino alla seconda cifra decimale. La strategia di Archimede per il calcolo di π era molto semplice consisteva nell'approssimare via via la circonferenza ad un poligono regolare inscritto e al corrispondente circoscritto (aumentando il numero dei lati del poligono diminuisce la differenza tra la lunghezza della circonferenza e i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti). I calcoli di Archimede si basano sul teorema di Pitagora e su semplici conoscenze algebriche.

Considerando una circonferenza di raggio unitario, ad esempio r = 1 cm, si trova il lato AB del quadrato inscritto.

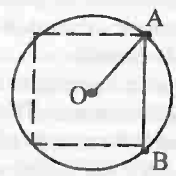


fig.1

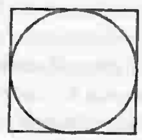


fig.2

Applicando il teorema di Pitagora (fig, 1) si ottiene AB =__________
e quindi:

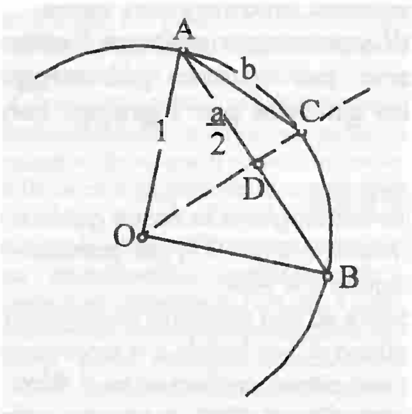
$$\pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} \cong \frac{\text{perimetro quadrato inscritto}}{\text{diametro}} \cong 2{,}82842$$

Come si può constatare, questa approssimazione è alquanto inesatta.
Il valore trovato 2,82842 è un'approssimazione per difetto di π. Un'approssimazione per eccesso si può definirla considerando il quadrato circoscritto al cerchio di raggio unitario (fig. 2).

$$\pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} \cong \frac{\text{perimetro quadrato cir coscritto}}{\text{diametro}} \cong 4$$

Il valore trovato 4 è un'approssimazione per eccesso di π. In questo modo si è riusciti a incapsulare π, nel senso che ora si sa con certezza che π non può essere più piccolo di 2,82842 e non può essere più grande di 4, cioè: 2,8284… < π < 4 (intervallo di precisione).
Si può migliorare ora questa precisione, come fece Archimede, raddoppiando di volta in volta il numero dei lati dei poligoni inscritto e circoscritto alla circonferenza di raggio unitario.
A questo punto occore superare una

difficoltà e trovare una relazione tra il lato del poligono seguente e il lato del poligono precedente. Ma questo ostacolo si supera facilmente con l'applicazione del teorema di Pitagora. Il segmento AB di lunghezza a è il lato di un poligono regolare inscritto di lati 2n. Il segmento AC di lunghezza b è il lato del poligono regolare inscritto (poligono successivo) ottenuto dal precedente poligono raddoppiando i lati.
Si trova una relazione tra *a* e *b*.



• *3) Completare:* $AD = a/2$
$OC = 1$
$AC = b$

$OD =$ ____________
$CD =$ ____________
$b =$ ____________

Ora: a è il lato di un poligono inscritto e b quello del poligono inscritto successivo il cui numero di lati è doppio del precedente. Si è anche trovato il lato del quadrato inscritto nella circonferenza di raggio unitario; cioè $a = \sqrt{2}$; allora il lato b dell'ottagono inscritto è:
b = ________ = ________

$= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ pertanto

$$\pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} \cong \frac{\text{perim.ottagono inscritto}}{\text{diametro}} = \ldots\ldots\ldots \cong 3{,}061467$$

Ora l'allievo può trovare da solo il lato dell'ottagono circoscritto alla circonferenza di raggio unitario; troverà allora:

$$\pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} \cong \frac{\text{perim.ottagono circoscritto}}{\text{diametro}} = \ldots\ldots\ldots \cong 3{,}3137$$

Si è riusciti a incapsulare π migliorando l'approssimazione (per difetto e per eccesso): infatti ora $3{,}0614 < \pi < 3{,}3137$.
Ciò significa che la cifra intera 3 è una cifra certa, perché si può affermare con sicurezza che π = 3,....... Se si continua con questo procedimento (raddoppiando ogni volta il lato del poligono) migliorerà di volta in volta l'approssimazione.
Con un computer, si può verificare che con un poligono di 4096 lati si ottiene per π un valore approssimato per difetto con 10 cifre decimali esatte! Archimede potendo calcolare solo a mente si è dovuto fermare ad un poligono di 96 lati: il risultato è comunque apprezzabile ancora oggi.

• *4) Nei suoi calcoli, Archimede quali poligoni ha dovuto prendere in considerazione?*

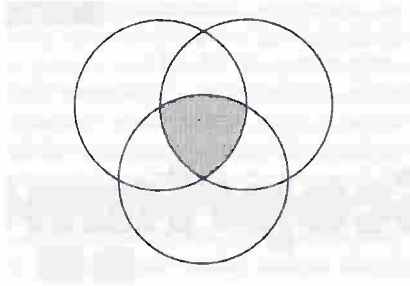
• *5) Per una approssimazione di π = 3,1... quali poligoni inscritti si devono prendere in considerazione?*

• *6) Sapendo che la calcolatrice dà valori esatti di π fino alla settima cifra decimale, verificare che* $3\,{}^{10}/_{71} < \_ < 3\,{}^{1}/_{7}$ *dà due cifre esatte; quante cifre esatte dà π =335/113 ?*

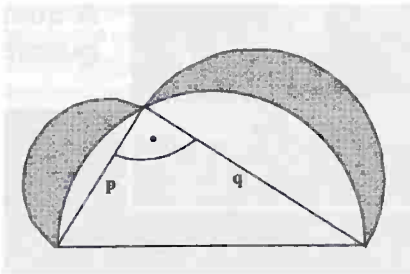
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

• *7) Consideriamo il poligono regolare di 4096 lati inscritto nell'equatore terrestre (raggio medio ≅ 6400 km). Trovare quanto sarebbe lungo (approssimativamente) il lato di tale poligono.*

• *8) Esistono ovviamente altri metodi per calcolare π. Euler trovò la seguente curiosa uguaglianza:*
Con l'aiuto di una calcolatrice, prova a calcolare π, considerando a destra i primi 7 addendi. Si troverà un valore vicino a 3,01177395, che è abbastanza deludente.
Se si dispone di un computer, si può organizzare un foglio elettronico che calcola fino a 5000 addendi della somma di destra. Si potrà allora osservare che π si avvicina al valore 3,14140168. Se ne ricava l'idea che il metodo di Euler, benché geniale e raffinato, genera un avvicinamento troppo lento al valore esatto di π.



• *9) Nella figura, le circonferenze hanno lo stesso raggio R e ciascuna di esse passa per i centri delle altre. Si può determinare se l'area tratteggiata è maggiore o minore della quarta parte di uno dei cerchi?*



• *10) Le lunule di Ippocrate di Chio (460 a.C.)*

Le tre semicirconferenze che generano le lunule hanno come diametro ordinatamente i tre lati del triangolo rettangolo di cateti p,q.
Alcuni geometri dell'antica Grecia, osservando che l'area del cerchio e delle sue parti dipende dal numero π, pensarono che tutte le figure delimitate da archi di cerchio dovessero avere l'area dipendente da π.
Verificare che le lunule di Ippocrate (cioè la superficie indicata in grigio nella figura) smentiscono questa ingenua affermazione intuitiva.

Filippo Di Venti