I segni nelle scienze esatte: una breve storia

Lucio Russo, fisico, matematico e storico della scienza

Dalle origini al Medioevo

Gli scritti di matematica e delle altre scienze esatte non usano solo la scrittura ordinaria, ma anche due categorie di altri segni: disegni e simboli. Non si tratta di due categorie reciprocamente del tutto estranee. Esistono infatti casi intermedi di figure che, pur non essendo veri disegni, non possono dirsi neppure puri simboli, in quanto rappresentano caratteristiche del loro significato: è questo il caso di molti diagrammi usati in matematica (ad esempio in teoria dei grafi), delle formule di struttura in chimica e dei diagrammi di Feynman in fisica. Inoltre vedremo che in matematica simboli e disegni hanno svolto un ruolo in parte complementare.

I simboli matematici sono essenziali nelle formule, oggi considerate un elemento indispensabile del linguaggio delle scienze esatte, ma per millenni la matematica era stata sviluppata senza alcun uso di formule.

I primi scritti matematici noti sono contenuti in tavolette mesopotamiche e papiri dell'Egitto faraonico. Nei papiri egizi sono inclusi disegni che rappresentano le figure geometriche considerate nei diversi problemi, mentre nelle tavolette mesopotamiche i disegni sono più rari e meno accurati. Non stupisce: tracciando segni di inchiostro su fogli di papiro, come facevano gli egiziani, si possono ottenere disegni molto migliori di quelli realizzabili incidendo con lo stilo su tavolette di argilla. Sia gli Egizi sia le diverse civiltà mesopotamiche usavano segni particolari per scrivere i numeri, ma non si trattava di 'simboli' nel nostro significato della parola, in quanto l'ampia presenza di ideogrammi nella scrittura li rendeva del tutto analoghi a molte altre parole. Va però detto che nelle tavolette mesopotamiche appaiono numeri scritti con la notazione posizionale (che fu completata con l'introduzione dello zero in epoca ellenistica).

Quando apparvero le prime scritture totalmente alfabetiche, si fece un'eccezione per i numeri, rinunziando solo per loro alla trascrizione fonetica. Nella scrittura fenicia, in particolare, singole lettere dell'alfabeto furono usate per indicare numeri; con questa scelta, fatta poi propria dai Greci, si può dire che nacquero i simboli matematici.

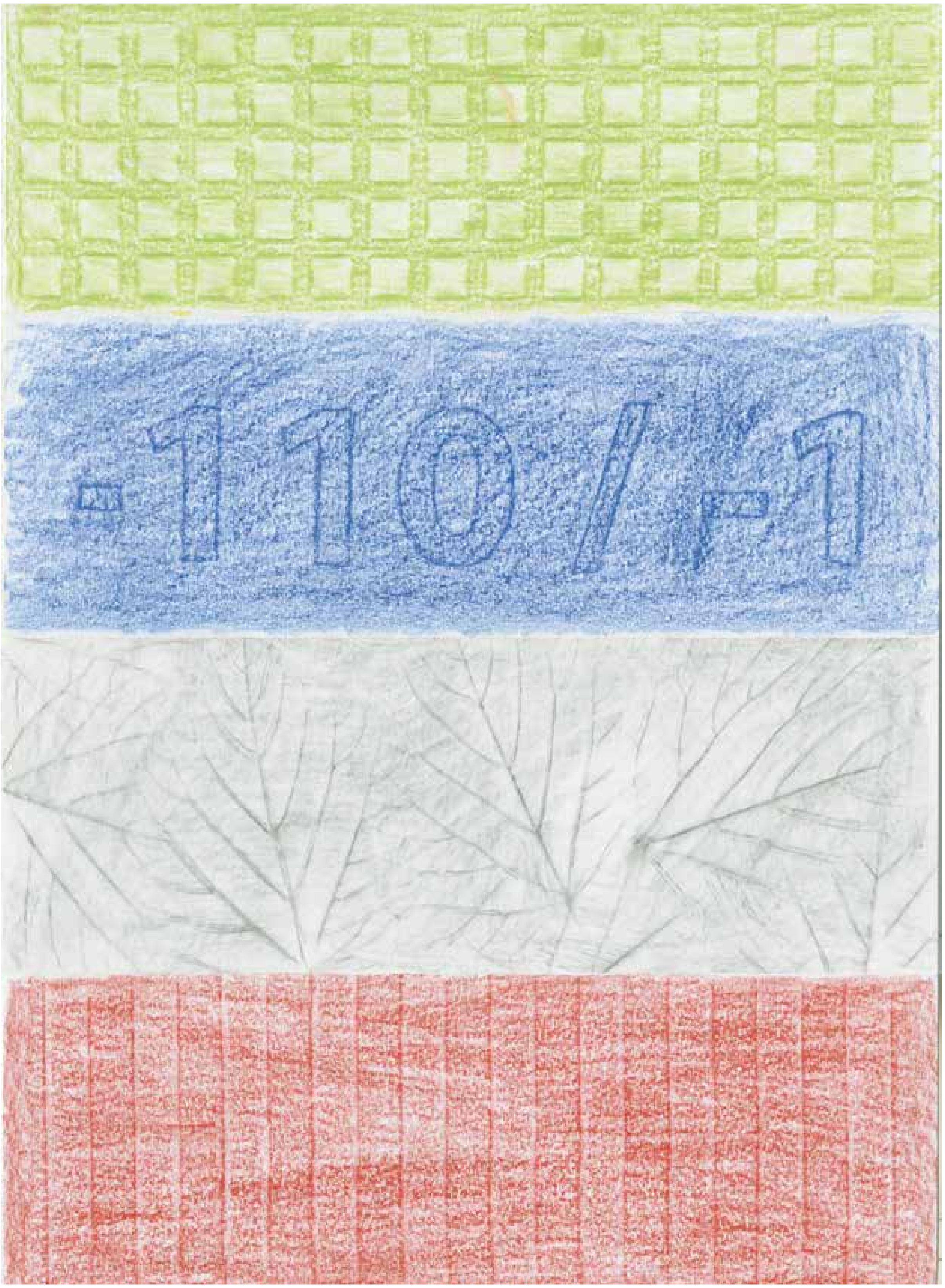
I Greci, con il termine *matematica* (τὰ μαθηματικὰ), indicavano un ampio ambito di discipline, che includeva astronomia, meccanica, ottica e idrostatica, ma nel quale un ruolo basilare era svolto dalla geometria, che forniva elementi essenziali a tutti gli altri settori. Le costruzioni geometriche fornivano anche uno strumento di calcolo: negli Elementi di Euclide sono descritte, ad esempio, costruzioni con riga e compasso che permettevano, dati tre segmenti, di trovarne il quarto proporzionale o di risolvere l'equivalente di ciò che noi chiameremmo un'equazione di secondo grado. I disegni svolgevano pertanto un ruolo essenziale, mentre l'uso di simboli era molto limitato: il linguaggio verbale è infatti perfettamente adeguato a descrivere sia le dimostrazioni dei teoremi di geometria sia le costruzioni geometriche che allora svolgevano un ruolo analogo agli attuali algoritmi di calcolo. Lettere dell'alfabeto erano usate sistematicamente per indicare sia numeri sia elementi dei disegni (come punti, rette o angoli), ma i simboli non alfabetici erano rari: alcuni autori esprimono le frazioni scrivendo prima il numero a numeratore seguito da un apice e poi quello a denominatore seguito da due apici, ma è più frequente trovare frazioni descritte in parole. Diofanto impiega un segno particolare per la sottrazione, che però non si trova in altri autori, e non si conoscono simboli greci equivalenti al nostro +.

L'assenza di 'simboli', nel nostro significato del termine, è totale nei classici dell'antica matematica cinese, mentre negli scritti matematici indiani, oltre all'uso di cifre per scrivere i numeri con la notazione posizionale (arrivata in India dalla Mesopotamia) si compie un secondo passo verso la notazione simbolica attraverso l'indicazione di incognite, quadrati e radici quadrate con abbreviazioni di parole. La matematica araba importa dall'India le cifre, ma non usa altri simboli. Sia nel testo di al-Khwārizmī in cui nasce, anche terminologicamente, l'algebra (*al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*), sia in quelli dei successivi studiosi islamici l'esposizione è puramente verbale.

Anche nei trattati matematici del Medioevo europeo i simboli continuano a essere quasi completamente assenti. Nel 1202 appare il *Liber abbaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che tra i suoi meriti ha quello di diffondere per i numeri la notazione posizionale con le cifre oggi dette arabe (ma che Leonardo Pisani, che le aveva apprese dagli Arabi, chiama giustamente indiane). Le cifre sono però i soli simboli che appaiono nell'opera di Fibonacci: l'esposizione è puramente verbale e le formule che oggi caratterizzano il linguaggio matematico sono totalmente assenti.

La prima Età moderna

In Europa qualche timido passo verso un'estensione del simbolismo matematico al di là delle cifre è compiuto nei secoli XV e XVI, in un primo tempo soprattutto nel-



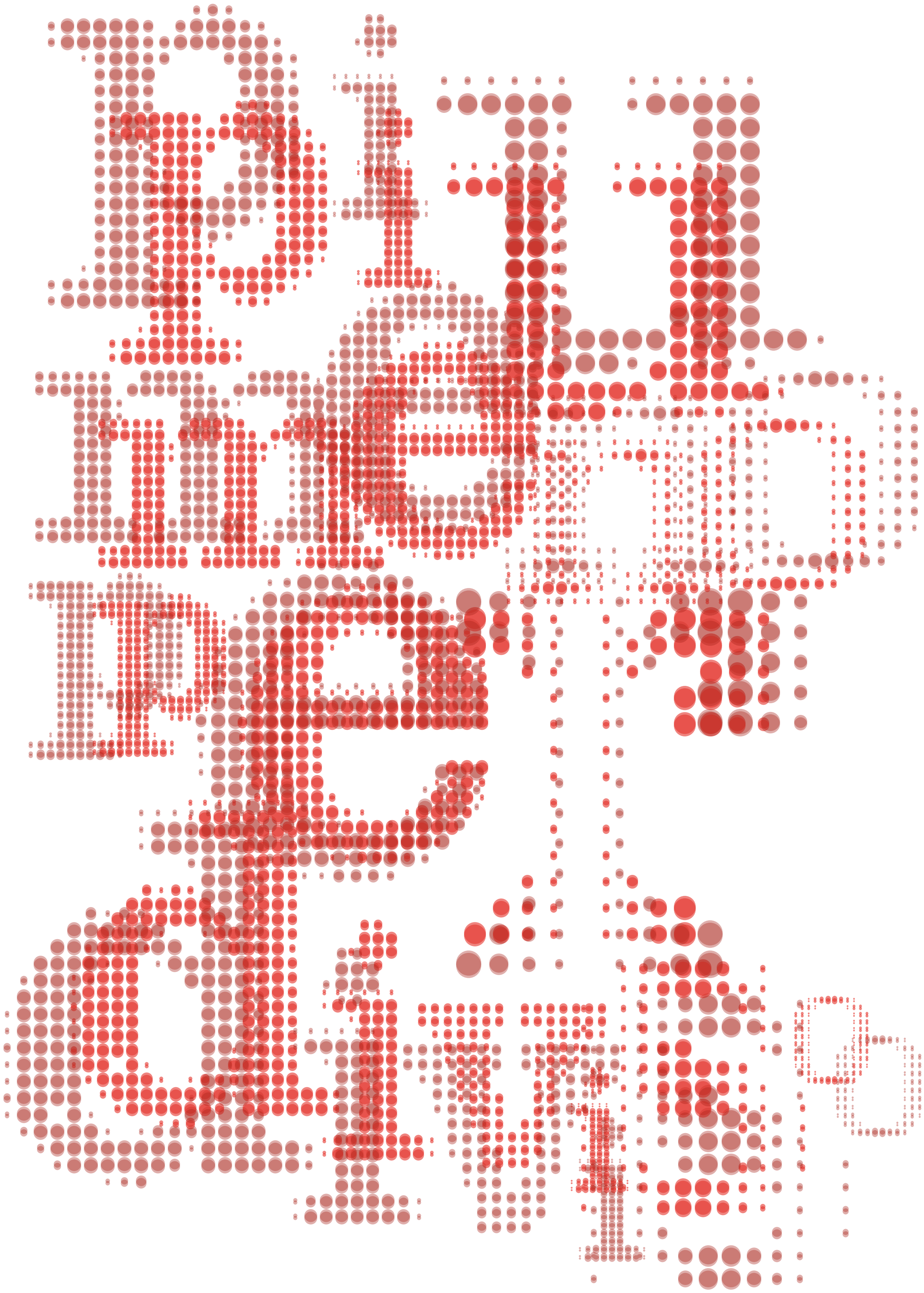
Milo Damiano,
2° anno di grafica – CSIA

la forma di abbreviazioni. Ad esempio, per indicare una quantità incognita in Italia si usava il termine cosa e per il suo quadrato e il suo cubo i termini censo e cubo, ma a partire dalla seconda metà del Quattrocento queste parole sono sostituite sempre più spesso dalle loro abbreviazioni *co.*, *ce.* e *cu.* (che appaiono, ad esempio, negli scritti di Luca Pacioli). Anche per indicare l'addizione e la sottrazione di due quantità in Italia cominciarono a usarsi, invece delle parole *plus* e *minus*, le loro abbreviazioni p. e m., in genere sovrastate dal segno ˜ (una forma di accento circonflesso).
I segni + e – per indicare somme e sottrazioni, oggi familiari, apparvero in Germania alla fine del XV secolo: il + derivò da una scrittura abbreviata della congiunzione latina et, mentre l'origine del – non è chiara. Questi segni per più di un secolo affiancarono tuttavia le abbreviazioni

italiane (p. e m.) senza riuscire a soppiantarle. Nel 1557 fu pubblicato il libro di aritmetica *The Wethstone of Witte*, del matematico gallese Robert Recorde, che, oltre a usare per la prima volta i segni + e – in un testo in lingua inglese, vi introdusse il segno = per l'eguaglianza; anche questo si diffuse però solo nel secolo successivo.
All'inizio del Seicento, nonostante l'uso delle cifre e quello (raro e non uniforme) di pochi simboli, la matematica era ancora esposta sostanzialmente in forma discorsiva e solo nel corso del Seicento e del Settecento si diffusero i simboli e le formule che oggi caratterizzano il linguaggio matematico. Perché si produsse questo mutamento?

La svolta del Seicento

Nella matematica classica gli enti fondamentali erano le grandezze, soprattutto geometriche. I problemi erano risolti ricavando grandezze (in genere segmenti o altre grandezze rappresentate da segmenti) da altre grandezze note. I metodi di soluzione consistevano soprattutto in costruzioni geometriche effettuate con riga e compasso (ma anche con altri strumenti, come il *mesolabio* progettato da Eratostene, che permetteva l'equivalente di una nostra estrazione di radice cubica); erano pertanto analogici e non digitali, mentre i calcoli numerici, più rari e faticosi, interessavano meno i matematici.
Già nel XIII secolo anche in Europa (come già in India e nel mondo islamico) i calcoli numerici divennero più agevoli grazie al diffondersi della notazione posizionale, ma un vero salto di qualità si ebbe all'inizio del XVII secolo, con l'apparizione delle tavole dei logaritmi (le prime, dovute a Napier, furono pubblicate nel 1614); divenne allora possibile effettuare calcoli numerici complessi rapidamente e con grande precisione. Il nuovo strumento era basato essenzialmente sull'idea che le operazioni divengono più semplici se effettuate tra potenze con la stessa base. L'idea non era nuova, ma per stampare tavole dei logaritmi era necessario che si formasse un mercato di persone interessate a calcoli numerici complessi abbastanza ampio da remunerare l'ingrato lavoro necessario per preparare le tavole. Fu quanto accadde in alcuni paesi europei (soprattutto Inghilterra, Paesi Bassi e Francia) all'inizio del XVII secolo grazie allo sviluppo di nuove attività economiche, molte delle quali connesse alla navigazione, che richiedevano strumenti matematici. Non a caso nel 1615, un anno dopo la loro pubblicazione, le tavole dei logaritmi di Napier costituivano in Inghilterra già uno strumento di lavoro usato nei cantieri navali, come è documentato nel caso del costruttore navale John Wells. Pochi anni dopo i logaritmi decimali furono introdotti da un altro inglese, l'esperto di astronomia e navigazione Henry Briggs, che aveva già pubblicato tavole numeriche per uso nautico. Un'altra attività, anch'essa connessa alla navigazione, che cominciava a richiedere strumenti matematici era la produzione cartografica, un settore in cui i Paesi Bassi acquistarono un'indiscussa supremazia.
La nuova efficienza dei calcoli numerici cambiò profondamente la struttura della matematica: gli enti fondamentali non furono più le grandezze, ma entità numeriche. Invece di usare procedimenti geometrici per risolvere anche problemi numerici, come avevano fatto i matematici greci, attraverso la geometria analitica si cominciarono a tradurre in forma numerica anche i problemi geometrici. Per fare un esempio, mentre classicamente si era studiata la parabola come una curva la cui proprietà caratteristica era che i quadrati costruiti sulle ascisse dei suoi punti (concepite come segmenti) fossero proporzionali alle loro ordinate, ora essa diviene il grafico della funzione $y=x^2$, e l'ente fondamentale diviene la funzione, ossia una relazione tra numeri.
In questa nuova matematica sia le dimostrazioni dei teoremi sia le soluzioni dei problemi si sviluppavano non più mediante argomentazioni verbali e disegni, ma sempre in maggior misura grazie a successioni di manipolazioni algebriche di espressioni numeriche, il cui valore non era ancora esplicitamente noto; questo nuovo modo di procedere rendeva utile modificare il linguaggio, diminuendo i disegni e incrementando i simboli.
Contrariamente a un'opinione abbastanza diffusa, l'espansione del simbolismo matematico non costituì quindi solo, né principalmente, un progresso che permise di esporre più sinteticamente procedimenti matematici in precedenza esposti in modo meno efficiente, ma consisté soprattutto nella creazione di un nuovo linguaggio adatto a procedimenti matematici nuovi.
Non è quindi un caso che la geometria analitica nasca una ventina d'anni dopo l'apparizione dei logaritmi nella *Géométrie* di Descartes, pubblicata nel 1637, e che quest'opera costituisca un passo importante nella diffusione del simbolismo matematico. Descartes non solo vi usa sistematicamente i segni + e – (il secondo nella forma raddoppiata --) e il simbolo √ (apparso il secolo precedente in Germania) per la radice quadrata, ma introduce anche l'attuale notazione esponenziale per le potenze, nonché un particolare segno di sua invenzione, non destinato a grande fortuna, per l'eguaglianza. Inoltre in quest'opera appare per la prima volta l'idea di usa-



Sara Vigizzi, corso propedeutico – CSIA

re le prime lettere dell'alfabeto, a, b, c, ecc., per indicare quantità note e le ultime, x, y, z, ecc., per le incognite e le coordinate. La *Géométrie* può così contenere molte formule dall'aspetto abbastanza simile a quello attuale.

Nel 1631, nella *Clavis Mathematicae* di William Oughtred, era apparso il simbolo × per indicare la moltiplicazione, che però non divenne di uso universale, convivendo con il punto · e con la semplice giustapposizione quando la moltiplicazione è tra quantità indicate da lettere. Nello stesso 1631 fu pubblicata l'*Artis Analyticae Praxis* di Thomas Harriot, in cui apparvero i segni < per *è minore di* e > per *è maggiore di*, ma occorsero quasi due secoli perché scomparissero varie notazioni alternative con lo stesso significato.

L'uso dei simboli si uniforma e si estende

Nella seconda metà del Seicento il simbolismo matematico si standardizza in larga misura (in particolare con l'accettazione generale dei segni +, – e =) e si estende notevolmente, con l'intervento esplicito dei maggiori matematici. Un ruolo molto importante fu svolto da Leibniz (1646-1716), al quale dobbiamo in particolare il punto per indicare la moltiplicazione, la lettera d per indicare il differenziale, la scrittura dy/dx per la derivata della funzione y(x) e il segno ∫ per l'integrale. Leibniz discusse a lungo questi simboli nella sua corrispondenza con Johann Bernoulli.

Un'ulteriore estensione del nuovo linguaggio si ha nel Settecento, grazie in particolare a Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783) che, tra l'altro, nel 1755 introdusse la lettera Σ per indicare le sommatorie, nel 1776 il ∂, ossia la forma corsiva della lettera de dell'alfabeto cirillico, per indicare le derivate parziali (Eulero era a San Pietroburgo) e nel 1777 la lettera i per indicare l'unità immaginaria. Si devono a Eulero anche il simbolo dei coefficienti binomiali (in una forma leggermente diversa da quella attuale) e l'uso della lettera e per indicare la base dei logaritmi naturali. La lettera π era stata introdotta già nel 1706 da William Jones (nel suo *Synopsis Palmariorum Matheseos*) per indicare il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro, ma si diffuse dopo la sua adozione da parte di Eulero.

Alle fine del Settecento non erano stati ancora introdotti tutti i simboli attualmente usati, ma il linguaggio matematico era divenuto quello al quale siamo oggi abituati largamente, formato da simboli e formule; il disegno aveva perso in larga misura l'antico ruolo di rappresentare forme di oggetti reali, ma aveva acquistato un nuovo spazio come rappresentazione di entità astratte: i grafici delle funzioni ne sono l'esempio più ovvio. L'uso dei simboli, contemporaneamente alla matematica, si era esteso anche alla fisica, che condivideva lo stesso linguaggio (e che spesso, come nel caso di Eulero, era sviluppata dagli stessi scienziati).

Nel Settecento vi fu anche un grande sviluppo della chimica, in particolare nella cosiddetta 'chimica delle arie', che facendo scoprire molte nuove sostanze e reazioni rese necessaria la riforma terminologica realizzata alla fine del secolo (indicata spesso con il termine 'rivoluzione chimica'), ma la chimica settecentesca, tipicamente qualitativa, non faceva alcun uso di simboli. Solo nell'Ottocento la nascita di una chimica quantitativa si accompagnò all'introduzione di simboli e formule.

Nel 1813 e nel 1814 in due articoli sugli *Annals of Philosophy* il chimico svedese Jöns Jacob Berzelius (1779-1848) introdusse i simboli degli elementi chimici nella forma tuttora in uso, formati dalle iniziali del loro nome latino. Divenne allora possibile introdurre formule in chimica, ma per individuare il numero di atomi presenti nella molecola di una sostanza bisognò aspettare il *Sunto di un corso di filosofia chimica* pubblicato da Stanislao Cannizzaro nel 1858, nel quale, basandosi sul recupero del principio di Avogadro, lo scienziato palermitano chiarì i ruoli di atomi e molecole ed espose le regole per la determinazione delle composizioni molecolari. Negli anni Sessanta dell'Ottocento si sviluppò il concetto di valenza e il fisico scozzese, Alexander C. Brown (1838-1922) ebbe l'idea di rappresentare con trattini i legami di valenza, introducendo così le formule di struttura.

Alla fine dell'Ottocento il linguaggio simbolico si era esteso a tutte le scienze esatte, ma né allora né successivamente è mai stato completamente uniformato. Ad esempio per indicare il prodotto vettoriale tra due vettori i matematici italiani Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo avevano introdotto il simbolo ∧, che fu adottato in Italia, Francia e altri paesi, ma in Inghilterra, Germania e Stati Uniti si preferì il simbolo ×; nei paesi in cui il prodotto vettoriale era indicato con ∧ il segno × indicava il prodotto scalare, altrove indicato con il punto · . L'estendersi della lingua inglese nei lavori scientifici ha diffuso le notazioni matematiche dei paesi anglofoni nell'ambito accademico, ma i simboli di uso più comune hanno mostrato una maggiore resistenza all'uniformazione. Per separare la parte intera di un numero dalla sua parte decimale l'uso del punto, proprio dei paesi anglofoni, non si è esteso agli altri, che continuano a preferire la virgola, e anche il simbolo ÷ per indicare la divisione – nonostante sia diventato ovunque familiare grazie alla sua presenza nelle calcolatrici virtuali che appaiono nei computer e negli smartphone – non ricorrendo nei lavori scientifici (dove per la divisione si usa solo il segno di frazione), non si è sostituito ai tradizionali due punti nei paesi non anglofoni.

Bibliografia

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations*, New York, Dover Publications, 1993.

Ferreiro, Larrie D., *Ships and science. The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution, 1600-1800*, Cambridge (Ma), The MIT Press, 2007.

Kline, Morris, *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi, 1999.

Russo, Lucio; Santoni, Emanuela, *La svolta europea alla fine del Seicento* (capitolo 5 in *Ingegni Minuti. Una storia della scienza in Italia*, Milano Feltrinelli, 2019).

Russo, Lucio, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Milano, Feltrinelli, 2021.