

12. Applicazioni della matematica – Opzione complementare

Il corso non può essere scelto dagli allievi con opzione specifica *Fisica e applicazioni della matematica*.

L'aspetto centrale del lavoro proposto è la costruzione di una conoscenza strutturata su un determinato tema secondo il procedimento seguente:

- analisi delle premesse (ipotesi);
- sviluppo di una teoria (da intendere in senso lato, non nel senso stretto dato a questo termine dalla logica matematica);
- ottenimento e analisi di risultati.

L'OC è una sede privilegiata per affrontare la matematica anche nei suoi aspetti storici e filosofici.

12.1. Obiettivi generali

Si vuole dare particolare importanza agli obiettivi culturali: la matematica può anche essere pensata come continuazione della formazione culturale già acquisita dall'allievo; occorrerà curare gli aspetti storici, filosofici, epistemologici. Si dovrà aiutare l'allievo a percepire il senso estetico della disciplina, a provar piacere per la matematica. L'estetica può essere vista in più modi: la bellezza di un'immagine generata da algoritmi, la finezza di una certa forma di pensiero, la sintesi contenuta in certe relazioni, il cui valore va al di là dell'aspetto puramente formale (ad esempio la notevole formula $e^{i\pi} + 1 = 0$).

Gli obiettivi saranno coniugati secondo le tre categorie usuali:

- il *sapere*, costituito soprattutto di alcune nozioni nuove, che permettano di rispondere, almeno in parte, alle domande (problemi) poste all'inizio;
- il *saper essere*, visto come attitudine positiva, tesa a scoprire mondi affascinanti, inaspettati;
- il *saper fare*, visto come capacità di manipolare oggetti appartenenti a strutture fino a poco tempo prima sconosciute, capacità di scoprirne il fascino (e anche i limiti), di saper trovare dei risultati e di saperli criticare.

È auspicabile l'uso di mezzi informatici (elaborazione di dati, rappresentazioni grafiche, Internet); più in generale, l'allievo dovrebbe essere messo in grado di affrontare una ricerca: data una situazione (problema), formulare congetture e cercare strade risolutive, in un contesto alla sua portata.

Campi

Ne dovrebbero essere svolti almeno due per anno.

12.1.1. Geometria proiettiva

Obiettivi

Capire l'evoluzione storica e culturale di una disciplina; l'importanza della scelta degli assiomi in una teoria matematica; la natura del ragionamento matematico; la differenza tra il metodo matematico e il metodo usato nelle scienze sperimentali; l'influenza esercitata dalla geometria proiettiva in altri ambiti scientifici.

Riconoscere le proprietà di una figura che restano invariate per proiezione e per sezione. Usare il metodo proiettivo come trasformazione delle figure per continuità.

Eseguire costruzioni geometriche basate sulle proprietà proiettive.

12.1.2. Geometrie non euclidee

Obiettivi

Capire l'evoluzione storica e culturale di una disciplina; l'importanza della scelta degli assiomi in una teoria matematica (nel caso delle geometrie non euclidee la messa in discussione del V postulato); la natura del ragionamento matematico; la differenza tra il metodo matematico e il metodo usato nelle scienze sperimentali; l'influenza esercitata dalle geometrie non euclidee in altri ambiti scientifici.

12.1.3. Teoria dei gruppi

Obiettivi

Individuare ambiti matematici (e non), di vario genere, che conducano naturalmente alla nozione di gruppo. Confrontare le basi assiomatiche della teoria dei gruppi con quelle di struttu-

re algebriche similari. Operare su un gruppo definito «per generatori e relazioni». Conoscere la struttura e il grafo rappresentativo di alcuni gruppi classici finiti (diedrale, quaternionico ecc.). Operare con gruppi di permutazioni e, in particolare, scomporre una permutazione in cicli e riconoscerne la parità. Acquisire le peculiarità tecniche di indagine e dimostrazione applicabili ai gruppi abeliani, giungendo al risultato fondamentale, per cui un abeliano di generazione finita è somma diretta di gruppi ciclici.

12.1.4. I grafi e le loro applicazioni

Obiettivi

Conoscere la definizione di grafo e di alcuni tipi particolari di grafi.

Applicare le conoscenze sui grafi a problemi extra-matematici.

Applicare le conoscenze sui grafi a questioni matematiche, con lo scopo di approfondire e ampliare la conoscenza e di interpretare certi contenuti secondo un'ottica diversa.

12.1.5. Fondamenti della matematica (logica e insiemistica)

Logica

Obiettivi

Manipolare oggetti (proposizioni) il cui valore è *vero* o *falso*. Verificare la verità o falsità di una proposizione, anche usando un linguaggio formale. Applicare certi principi della logica a situazioni ricorrenti in un normale corso di matematica, quali la dimostrazione di un teorema o l'analisi di un contro-esempio, e ad altre situazioni teoriche e pratiche (ad es. macchina di Turing, computer).

Insiemistica

Obiettivi

Analizzare a fondo situazioni spesso ricorrenti in un normale corso di matematica. Ad es.: che cosa significa «infinito»? È solo un modo di dire (Gauss) o è un oggetto con il quale si può concretamente operare (Cantor)? Due quantità infinite hanno sempre stessa grandezza? Acquisire una certa capacità di astrazione, ad es. rendendosi conto che nell'universo della matematica ogni oggetto è un insieme, comprendere regole (assiomi) che reggono una determinata teoria. Analizzare esempi che mostrano i limiti dell'approccio intuitivo (paradossi di Russell). Costruirsi un'idea di teoria che permetta di introdursi nel problema della coerenza, con possibilità di aggancio a quanto visto sopra per la logica.

12.1.6. Matematica e informatica

Obiettivi

Apprendere l'uso di uno o più programmi per la matematica (CAS -Computer Algebra System) o utilizzabili anche per fare matematica (foglio elettronico o altro), oppure servirsi di un linguaggio di programmazione. Decidere quando e come usare il computer, rendersi conto dei limiti quantitativi e qualitativi della macchina. Rendersi conto, con esempi concreti, che il computer può essere un mezzo utile, a volte indispensabile, ma a volte fuorviante. Impostare piccoli progetti, da sviluppare anche con l'ausilio del mezzo informatico, ed elaborare dei rapporti con premesse, percorso seguito, conclusioni.

12.1.7 Matematica e astronomia

Obiettivi

Generali: mettersi in dubbio davanti all'Universo, capire la necessità di trovare modelli matematici di eventi. Capire che nella scienza esiste il dubbio (ad es. perché ci sono anomalie di comportamento nel moto di certi astri).

Culturali: capire i contesti culturali e le ricerche nella storia della visione dell'Universo.

Matematici: apprendere le basi matematiche della relatività speciale, con cenni anche a quella generale, e l'impianto matematico descrittivo del modello del moto dei pianeti, delle stelle, delle galassie. Afferrare il concetto di sistema relativo e di sistema assoluto, studiare traiettorie coniche, calcolare distanze astronomiche.

12.1.8. Infinito filosofico, infinito matematico

Obiettivi

Comprendere i paradossi della filosofia greca alla luce del moderno pensiero matematico (insiemi, limiti), l'esistenza di vari «livelli» di infinito, il significato di certi enunciati contrari al senso comune. Acquisire i concetti di insieme ordinato e di similitudine tra insiemi ordinati. Operare con l'aritmetica dei cardinali e degli ordinali.

12.1.9. Matrici e applicazioni lineari

Obiettivi

Conoscere le basi del calcolo matriciale ed eseguire le operazioni anche con l'ausilio del mezzo informatico. Conoscere le principali trasformazioni geometriche del piano. Risolvere sistemi lineari di equazioni, anche con metodi informatici. Rappresentare figure e solidi con un computer. Utilizzare un foglio elettronico e altro «software» matematico (CAS) nei contesti geometrico e algebrico.

12.1.10. Metodi della statistica

Obiettivi

Analizzare e descrivere, anche graficamente, insiemi di dati numerici. Conoscere i concetti di centralità e di dispersione attorno alla media. Usare il computer per elaborare dati in senso statistico.

Capire i termini del problema del campionamento statistico.

Conoscere i vari modi per stimare la media con intervalli di confidenza. Effettuare test statistici sulla media.

Usare la retta di regressione per prevedere risultati.

12.1.11. Processi dinamici

Obiettivi

Conoscere il significato di processi iterativi e ricorsivi e saperli manipolare. Conoscere i concetti, il linguaggio formale e i procedimenti utili per lo studio di tali processi. Capire un processo, sia dal punto di vista teorico che da quello pratico (descrizione di un algoritmo).

12.1.12. Geometria descrittiva

Obiettivi

Rappresentare la realtà tridimensionale con un metodo rigoroso e risolvere problemi geometrici con delle costruzioni. Prendere confidenza con una tecnica di disegno. Scoprire il significato teorico presente in certe situazioni (a volte dall'aspetto apparentemente solo tecnico). Capire il significato e l'uso di elementi geometrici non abituali, quali punti e rette impropri. Rappresentare situazioni di una certa complessità, curando anche gli aspetti grafico ed estetico.

12.1.13. Teoria dei numeri

Obiettivi

Conoscere l'importanza storica di questa teoria. Applicare il metodo di dimostrazione per induzione completa. Risolvere alcune equazioni di Diofanto. Riconoscere la struttura algebrica degli insiemi Z_n (di gruppo, di anello, di corpo). Risolvere equazioni del tipo $ax=0$ in Z_n . Applicare il piccolo teorema di Fermat. Capire il fascino e l'importanza dei problemi sui numeri primi, sui numeri perfetti, sui numeri di Mersenne e di Fermat. Determinare qualche frazione continua. Studiare la successione di Fibonacci.

12.1.14. Matematica e mineralogia

Obiettivi

Prendere consapevolezza del legame tra forme geometriche e simmetrie e le caratteristiche fisiche dei cristalli. Descrivere questo mondo matematicamente. Rappresentare con diagrammi adeguati la struttura spaziale di reticoli cristallini. Capire le classificazioni dei minerali in base al loro aspetto geometrico.

12.1.15. Teoria dei giochi

Obiettivi

Analizzare situazioni di conflitto, cioè situazioni in cui due (o più) partiti perseguono interessi contrastanti. Costruire modelli matematici adeguati («giochi»), impostare in essi determinati problemi, ricercare soluzioni e acquisire strumenti matematici (matrici, programmazione lineare, calcolo delle probabilità, analisi, ...) e informatici necessari.

12.1.16. Introduzione storica alla topologia

Obiettivi

Conoscere le condizioni storiche che hanno portato alla nascita della topologia. Conoscere, attraverso lo studio di esempi scelti, le basi della topologia. Applicare le conoscenze acquisite ad alcune questioni fondamentali della geometria. Applicare le conoscenze acquisite per approfondire qualche problema di analisi.

12.1.17. Metodi numerici

Obiettivi

Capire problemi che la matematica non può risolvere con metodi algebrici (ad es. risolvere un'equazione trascendente). Comprendere e applicare metodi algebrici elaborati (ad es. l'algoritmo di Gauss per un sistema lineare) e i relativi problemi di approssimazione, rendersi

conto di alcune possibilità d'uso e dei limiti di un computer. Conoscere e applicare alcuni metodi numerici classici (ad es. l'algoritmo di Newton per risolvere un'equazione).

12.1.18. Successioni numeriche; matematica finanziaria

Obiettivi

Cogliere la differenza tra metodo induttivo e metodo deduttivo. Capire il principio di induzione e saper fare semplici dimostrazioni. Risolvere semplici problemi di matematica finanziaria. Acquisire una competenza informatica relativa agli argomenti trattati (utilizzare un foglio elettronico e altro software matematico (CAS)).

12.1.19. Equazioni differenziali

Obiettivi

Capire il concetto di equazione differenziale e applicarlo a problemi nel campo della fisica e di altre discipline. Distinguere alcuni tipi di equazioni differenziali e risolverle.

12.1.20. Programmazione lineare

Obiettivi

Determinare massimi o minimi di una funzione lineare a più variabili (funzione obiettivo), sotto opportune condizioni (vincoli) espresse da disequazioni lineari. Trattare problemi concreti tipici (per esempio trasporti da effettuare al minimo costo, problemi di produzione con il massimo profitto, problemi di organizzazione). Impostare un modello matematico e risolvere problemi graficamente (insiemi e disequazioni in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3), oppure algebricamente (insiemi e disequazioni in \mathbb{R}^n , sistemi lineari e matrici).

12.2. Valutazione

Si dovranno programmare unità didattiche ragionevolmente «chiuse» (non troppo disperse), su cui far lavorare l'allievo. Le prove scritte e orali di grado e la qualità della partecipazione come pure il colloquio personale con il docente sul lavoro svolto dovranno permettere di accertare il conseguimento degli obiettivi.