Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

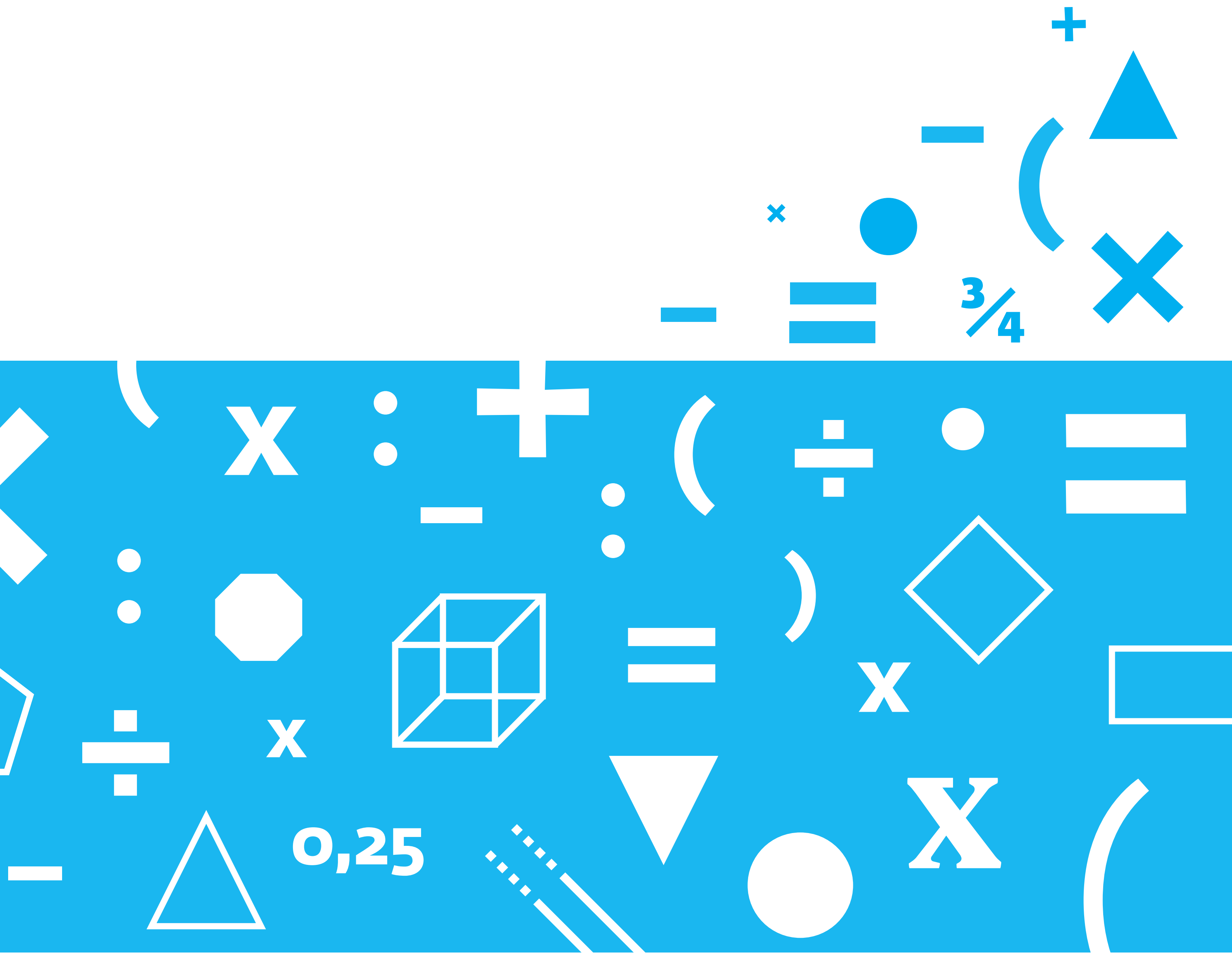
Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport
Divisione della scuola

N. 9
Ottobre 2014

Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare

Silvia Sbaragli e Elena Franchini

Rapporto di ricerca del Dipartimento formazione e apprendimento



Proposta di citazione:
Sbaragli S., Franchini E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare.* Locarno: Dipartimento Formazione e Apprendimento. PP. 241.

Locarno, 2014
Dipartimento Formazione e Apprendimento
Piazza San Francesco 19, 6600 Locarno
silvia.sbaragli@supsi.ch

Responsabilità del progetto: Silvia Sbaragli
Autrici: Silvia Sbaragli e Elena Franchini
Collaboratori: Elena Franchini e Miriam Salvisberg
Revisione: Gianfranco Arrigo e Edo Dozio
Impaginazione: Selene Dioli
Copertina: Stephanie Grosslercher

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare va ai docenti di scuola elementare e ai loro allievi che hanno somministrato e svolto la prova nelle proprie classi, così da consentire in seguito l'analisi dei risultati e la relativa valutazione didattica.

Ringraziamo inoltre Mirko Guzzi e gli ispettori per il sostegno fornito alla stesura di questo documento e il CIRSE per l'aiuto fornito per l'individuazione dei risultati ottenuti nei diversi questionari, in particolare Alberto Crescentini, Selene Dioli e Miriam Salvisberg.

Un ringraziamento va anche a Gianfranco Arrigo, Bruno D'Amore, Giorgio Bolondi, Edo Dozio e a Spartaco Calvo per la lettura critica del documento e i preziosi consigli.

Sommario

Introduzione 7
1. Il contesto generale di riferimento dal punto di vista della didattica della matematica...... 9
1.1. La valutazione in oggetto e il suo ruolo 12
1.1.1. Le valutazioni nella scuola: fini e mezzi 12
1.1.2. Efficacia didattica delle prove standardizzate vs valutazione interna 13
1.1.3. L’uso delle prove standardizzate da parte dei docenti 15
1.2. Le prove di matematica 17
1.2.1. Gli ambiti e gli aspetti di competenza valutati e il nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo 18
1.2.2. I fascicoli somministrati e organizzazione della somministrazione 21
1.2.3. Codifica dei risultati dei quesiti 23
1.2.4. Sintesi dei risultati dei quesiti ottenute dal CIRSE 24
1.2.5. La nuova lettura dei risultati 25
2. Geometria – Sapere, riconoscere e descrivere 27
2.1. Posizioni di rette nello spazio 29
2.2. Ampiezza dell’angolo 30
2.3. Triangoli e loro proprietà 34
2.4. Quadrilateri e loro proprietà 37
2.5. Cerchio e suoi elementi 43
2.6. Figure dello spazio 47
2.7. Simmetria assiale 48
3. Geometria – Eseguire e applicare 51
3.1. Confronto di lunghezze di percorsi 52
3.2. Ampiezza dell’angolo 57
3.3. Perimetro 62
3.4. Confronto di perimetri 69
3.5. Equiscomposizione 73
3.6. Confronto di aree 74
3.7. Cerchio e suoi elementi 78
3.8. Simmetria assiale 80
4. Grandezze e Misure – Eseguire e applicare 89
4.1. Tempo 90
4.2. Lunghezza 94
4.3. Area 99
4.4. Stima 102
4.5. Convertire unità di misura di lunghezze 105

4.6. Convertire unità di misura di massa 112
4.7. Convertire unità di misura di capacità 114
5. Numeri e calcolo – Eseguire e applicare 119
5.1. Addizione e sue proprietà 120
5.2. Sottrazione 124
5.3. Moltiplicazione e sue proprietà 130
5.4. Divisione 139
5.5. Stima di risultati di calcoli 147
5.6. Uguaglianze 151
6. Numeri e calcolo – Argomentare e giustificare 153
6.1. Ordinamento numeri decimali 154
6.2. Situazioni-problema 158
6.3. Addizioni 164
6.4. Moltiplicazioni 166
6.5. Divisioni 181
6.6. Uguaglianza 184
6.7. Passaggio di registri semiotici 185
7. Analisi dei dati e relazioni – Sapere, riconoscere e descrivere 193
7.1. Interpretazione di tabelle 195
7.2. Interpretazione di diagrammi a barre 211
7.3. Interpretazione di istogrammi 222
7.4. Interpretazione di grafici 228
8. Alcune considerazioni finali 231
Bibliografia 235

Introduzione

Il presente rapporto ambisce a riassumere i principali risultati scientifici, interpretati in chiave didattica, prodotti dal progetto relativo alle prove standardizzate di matematica somministrate nella scuola elementare. Il progetto nasce dalla collaborazione tra l'Ufficio Scuole Comunali e il Dipartimento Formazione e Apprendimento. Da qualche anno, infatti, l'Ufficio Scuole Comunali ha attivato una riflessione relativa al tema delle competenze raggiunte dagli allievi, in particolare in matematica. Nel 2010 è stato chiesto al Centro Innovazione e Ricerca sui Sistemi Educativi (CIRSE) di produrre e fornire al Cantone delle prove standardizzate di matematica da somministrare agli allievi di V elementare, per testare le competenze raggiunte alla fine dell'anno scolastico precedente. Nel mandato per il progetto si legge: «Le prove validate permetteranno quindi di valutare sia le competenze raggiunte dagli allievi, sia di monitorare il sistema nel suo insieme. Va notato che le prove non verranno utilizzate a scopi selettivi, ma, oltre alla loro funzione di monitoraggio di sistema, costituiscono uno strumento tra gli altri a disposizione di docenti e scuole per valutare il livello di competenza degli allievi».

Nel 2010 è stato quindi chiesto di sviluppare una prova volta a valutare le competenze raggiunte dagli allievi di IV elementare in alcuni ambiti e aspetti di competenza di matematica che già si intravvedevano nell'allora bozza del documento *Competenze fondamentali per la matematica*, pubblicato nel 2011. La definizione delle competenze da valutare ha riguardato oltre ad una dimensione di contenuto, anche una di prospettiva proiettandosi sul profilo di competenze che si sarebbe delineato dopo l'entrata a regime degli accordi di armonizzazione. I risultati generali di tale valutazione sono riportati in CIRSE (2014).

Nell'ottobre del 2013 è stato chiesto a Silvia Sbaragli, docente-ricercatore del DFA/SUPSI, che non aveva partecipato alla creazione delle prove, di effettuare una valutazione didattica dei risultati che potesse essere utile per i docenti, e di conseguenza per i loro allievi, sul piano della riflessione e della trasposizione didattica.[1] Tale analisi è stata effettuata insieme alla collega Elena Franchini e con la collaborazione di Miriam Salvisberg.

Questo rapporto è la sintesi delle considerazioni didattiche scaturite dalla lettura e analisi dei singoli quesiti e dei relativi risultati ottenuti, effettuate cercando di interpretare didatticamente i punti di forza e le difficoltà incontrate dagli allievi.

In questo lavoro vengono presentati: il contesto generale di riferimento nel quale si possono collocare le prove standardizzate somministrate, inquadrato dal punto di vista della didattica della matematica; la presentazione della valutazione in oggetto e del suo ruolo istituzionale e didattico; le prove di matematica somministrate con le specifiche caratteristiche e l'organizzazione della somministrazione; una sintesi dei risultati ottenuti dal CIRSE; la nuova lettura dei risultati dal punto di vista della didattica della matematica, suddivisa in 6 capitoli specifici, uno per ciascun ambito/aspetto di competenza; alcuni commenti finali di sintesi dell'analisi effettuata.

[1] Di notevole rilievo è il concetto di *trasposizione didattica*, con il quale si indica uno dei compiti fondamentali dell'insegnante, cioè una reinterpretazione del Sapere in modo che sia funzionale alla scuola, al sapere degli allievi, ossia che sia adatto ad uno specifico livello scolastico e alle attese della società. La trasposizione didattica va intesa come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione del luogo, del pubblico e delle modalità didattiche che ci si pone (D'Amore, 1999).

1. Il contesto generale di riferimento dal punto di vista della didattica della matematica

A partire dal 2000, dopo il “Rapporto Europeo sulla qualità dell’istruzione”[2] che ha fatto da sfondo alla Conferenza di Lisbona ed ai suoi obiettivi, ritenuti strategici per tutti i paesi europei, si è iniziato a parlare sempre di più di matematica in termini di apprendimento di base e come elemento irrinunciabile nella formazione del futuro cittadino.

Dal punto di vista didattico si è quindi cercato di trasformare la matematica da disciplina di élite ad un sapere per tutti, modificando un approccio ricco di formalismi, automatismi, artifizi e azioni in gran parte riproduttive, in uno dinamico, ricco di senso e con una forte valenza formativa per la totalità degli individui; individui che necessitano di ambienti funzionali al loro apprendimento e di opportune strategie didattiche.

Allo scopo di migliorare il rapporto tra gli elementi innovativi prospettati e gli insegnanti che dovrebbero accoglierli e realizzarli nelle loro classi, è emersa, a livello europeo, la necessità di fornire una chiave di lettura, equilibrata e propositiva, delle nuove sollecitazioni in atto, non solo sul piano normativo, ma anche in relazione alle considerazioni disciplinari più accreditate e alla consolidata ricerca in didattica della matematica.

L’attuale riflessione nel campo della didattica, adottata anche dal Canton Ticino tramite l’implementazione del nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo, attualmente in consultazione, consiste nella necessità di proporre un curricolo nel quale l’obiettivo principale sia la formazione di allievi competenti, tenendo sempre ben presente lo sviluppo ontogenetico di questi ultimi.

Vi è quindi uno stretto collegamento tra le diverse forme di curricolo e la pianificazione e gestione dei fenomeni didattici che rappresentano il risultato di complessi meccanismi attraverso i quali il Sapere si trasforma in sapere competente. È cosa nota, infatti, che col passare degli anni, gli insegnanti sulla base dell’esperienza e delle sollecitazioni esterne, modificano, aggiustano, interpretano i programmi e il curricolo ufficiale, nell’intento di ottenere da parte degli allievi prestazioni ritenute più funzionali al proseguimento del percorso scolastico.

Una schematizzazione semplificata che riassume l’attività docente cha parte da un Sapere e che giunge alla costruzione di un sapere competente è la seguente riportata da Fandiño Pinilla (2002):

[2] Relazione europea del maggio 2000 sulla qualità dell’istruzione scolastica elaborata in base a sedici indicatori di qualità.

Sapere

trasposizione didattica

sapere da insegnare

la realtà dell'azione didattica

sapere insegnato

la realtà dell'apprendimento

sapere appreso

costruzione della conoscenza

sapere competente

La messa in pratica di un curricolo non può che seguire la stessa evoluzione, partendo dall'analogo del Sapere (che è il "curricolo auspicato") fino all'analogo del sapere competente (che è il "curricolo appreso"):

Curricolo auspicato

atto dell'insegnamento

curricolo che si intende proporre

realtà della vita d'aula

curricolo sviluppato

la realtà dell'apprendimento

curricolo appreso

La letteratura internazionale di ricerca sul curricolo, sia empirica che teorica, evidenzia almeno cinque contesti curricolari che vengono accettati come modi di interpretare il termine (Giménez Rodríguez, 1997):

- il curricolo "ufficiale" (o curriculum intended): è costituito dall'insieme di documenti promulgati dall'autorità educativa e comprende i seguenti aspetti: programmi, contenuti minimi, orientamenti, obiettivi o competenze che si devono raggiungere ecc.;
- il curricolo "potenziale": è il contenuto comune a libri o guide per docenti, testi per studenti, schede, ..., ai quali gli insegnanti fanno riferimento o ricorso. Tali materiali di solito interpretano abbastanza fedelmente i programmi fissati dall'autorità e si differenziano solo per la proposta del loro sviluppo sia pratico che teorico;
- il curricolo "sviluppato" (o curriculum implemented): è costituito dall'insieme delle nozioni, prassi, metodologie didattiche e valutative che l'insegnate realmente usa in aula. L'insegnante fa riferimento a questo curricolo, per esempio, nell'azione valutativa degli studenti;

- il curricolo “appreso”: è il corrispettivo del precedente visto dalla parte dell’allievo; è l’insieme delle conoscenze, abilità, capacità, immagini delle metodologie, immagini della valutazione, immagini dell’azione didattica dell’insegnante,..., che lo studente ha appreso, ma anche quello che ha costruito implicitamente come immagini personali;
- il curricolo “sommerso”: è la parte di curricolo che lo studente ha effettivamente appreso di quello che l’insegnante aveva intenzione di sviluppare, comprese regole scorrette che rappresentano un fraintendimento di quelle che l’insegnante ha trattato in aula; si tratta quindi dell’interpretazione personale che ogni singolo allievo si fa di quello che il docente ha fornito come curricolo sviluppato, pensandolo condiviso dal resto della classe. In questo tipo di curricolo vengono compresi, per esempio, concetti o regole scorrette che però l’allievo applica correttamente e che limitano la sua possibilità di capire le correzioni e i suggerimenti dell’insegnante, dato che, di fatto, parlano di oggetti di pensiero diversamente interpretati.

L’evoluzione dei saperi sopra riportata, del curricolo e i diversi contesti curricolari presentati sono una buona base per rendere l’idea della complessità che si incontra quando si parla di trasposizione didattica effettuata dal docente, soprattutto in ambito matematico.

Entrambe le considerazioni rientrano nell’analisi dei singoli quesiti, effettuata in questo lavoro di ricerca che tiene conto dei Programmi vigenti al momento della somministrazione delle prove, del nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e del sapere appreso dagli allievi.

1.1. La valutazione in oggetto e il suo ruolo

Il verbo valutare e il sostantivo valutazione hanno radice latina. Entrambi derivano dalla parola latina *vàlitus*, che significa aver prezzo, dare un prezzo, stimare, aver in considerazione o tenerne conto in proporzione al valore che si stima (Pianigiani, 2002).

Dunque, così come sostiene Domenici (2007): «si valuta quando si dà valore, si dà importanza ad un oggetto, ad un soggetto, ad un processo, ad un contenuto o, in generale, ad una situazione». Nel vocabolario della lingua italiana Zingarelli (Bologna), la definizione di "valutazione" è divisa in due accezioni, una generica, riconducibile a previsione, stima, apprezzamento, …, ed una pedagogica che recita: «Acquisizione di dati e informazioni che permettono di verificare l'efficacia di un intervento educativo e il profitto di un allievo». Si delineano quindi due aspetti diversi, uno relativo al profitto e uno di ritorno, informativo, sull'efficacia. In italiano vi è una sola parola per due significati diversi, così come avviene anche in altre lingue, mentre ad esempio in inglese vi sono due termini specifici per sottolineare questa distinzione: *assessment* e *evaluation.* Per un approfondimento si veda Fandiño Pinilla (2002).

1.1.1. Le valutazioni nella scuola: fini e mezzi

In ambito educativo, la valutazione interessa tanti contesti (Domenici, 2007): «il sistema (ossia il sistema di istruzione nel suo complesso), i vari segmenti scolastici (scuola primaria, secondaria di primo e secondo grado, ...), le singole unità operative (scuole ed istituti), l'ambiente di classe, il lavoro del docente svolto in classe, quello dell'allievo ed il curricolo».

Data la complessità del valutare, può certamente essere d'aiuto identificare la valutazione in oggetto secondo le sue caratteristiche, in questo caso *di sistema, esterna, valutativa e criteriale*.

La prova di IV come prova di sistema

Il sociologo Vergani (2002) illustra molto chiaramente come cambia il fine e il significato del valutare se a questa parola vengono associati rispettivamente i termini citati in precedenza: «Con valutazione *di sistema* si intende generalmente l'insieme delle attività che permettono di formulare una valutazione complessiva sul funzionamento di un sistema formativo. La valutazione di sistema si configura di conseguenza come una valutazione di sintesi costituita da tre momenti fondamentali:

- una documentazione;
- dati provenienti da osservazioni esterne;
- comparazioni con altre esperienze.

Importante è ricordare che la valutazione di sistema non è mai da intendere come giudizio finale, ma piuttosto come un monitoraggio continuo con l'obiettivo di promuovere».

La prova di IV come prova esterna

Riprendendo le parole di Vergani (2002), le prove *esterne* non vengono effettuate dall'istituzione scolastica e formativa tra i suoi componenti, ma:

- «chi valuta è esterno, al di sopra delle parti e neutrale alla scuola esaminata;
- le motivazioni e i meccanismi attivati sono diversi da quelli che si attiverebbero con la valutazione di tipo interno;
- le metodologie utilizzate, i processi di verifica e il modo di condurre le prove sono differenti da quelli di tipo interno».

Si è sentito il bisogno di valutazioni di tipo esterno in quanto c'era e c'è la necessità di capire se il sistema d'istruzione, così come è stato pensato e viene attuato, può considerarsi ben funzionante. L'autore individua diversi tipi di cause che possono aver contribuito alla nascita della valutazione esterna: «Sono formali, ad esempio, quelle cause che muovono le valutazioni nazionali regolate da leggi, norme e decreti. Si parla invece di cause sostanziali e simboliche quando accade che le singole istituzioni scolastiche sentono la necessità di valutazioni esterne per evitare di cadere nell'autoreferenzialità e per rispondere al bisogno di una valutazione neutrale e obiettiva da parte di persone non emotivamente coinvolte».

La prova di IV come prova valutativa

La valutazione *valutativa* è quella della scuola che si autovaluta, quella che le permette di effettuare un bilancio confrontando la qualità dell'istruzione fornita nell'anno corrente con i precedenti e di garantire agli studenti una formazione continua. In questa valutazione rientrano quelle sul lavoro degli insegnanti, sui libri di testo e sui curricoli. Come sostiene Fandiño Pinilla (2008), attraverso questo genere di monitoraggio è possibile:

- «effettuare un bilancio su quello che lo studente è in grado di fare ad un certo momento del processo di insegnamento-apprendimento;
- guidare la successiva fase dell'apprendimento sulla base del bilancio precedente;
- scoprire le cause della difficoltà dello studente;
- incoraggiare il successo dello studente per favorirne la riuscita».

Questa forma di (auto)controllo è necessaria perché la scuola non vive di vita autonoma, ma all'interno di un contesto istituzionale e politico del quale bisogna tenere conto.

La prova di IV come prova criteriale

Una valutazione *criteriale*, così come suggerisce il termine, è basata sul criterio, ossia su un metodo il più possibile giusto e ugualitario, nel quale categorie e obiettivi sono prefissati: «gli esiti delle prove di valutazione possono essere valutati sulla base di un confronto tra le prestazioni dell'allievo e gli obiettivi della formazione (valutazione criteriale)» (Dozio, 2012).[3] Solitamente un test di tipo criteriale si utilizza se si ambisce a verificare cosa sa fare e che cosa conosce l'allievo e come abbia appreso le risorse che ci si aspetta siano da lui padroneggiate. Permette quindi di sfruttare le informazioni ricavate per determinare il rapporto tra lo studente e il curriculum attuato dall'insegnante (*implemented curriculum*) e per capire quali obiettivi curricolari siano stati raggiunti (*attained curriculum*).

1.1.2. Efficacia didattica delle prove standardizzate vs valutazione interna

Un vantaggio di questo tipo di valutazione è quello di evitare gli effetti legati alla valutazione interna e che possono rendere le prove non significative.

I più comuni sono:

- l'effetto stereotipia che consiste in una lettura costante dell'alunno da parte dell'insegnante. L'insegnante si convince che la situazione dello studente non possa

[3] Dagli appunti per il modulo di 'Scienze dell'Educazione', Prof. Ezio Dozio, Dipartimento Formazione e Apprendimento (CH), 2012.

cambiare ed evolversi positivamente o negativamente nel tempo. La valutazione e i giudizi nei confronti del ragazzo sono così come congelati da questa opinione;

- l'effetto alone che porta il docente a interpretare gli esiti in un contesto di situazioni ed elementi che falsano la prova;
- il condizionamento profetico cioè la tendenza dell'insegnante a valutare come scarsi i risultati di particolari allievi con i quali è certo di non poter raggiungere determinati obiettivi.

Bolondi (2010), in proposito, sostiene che: «È provato da molte ricerche che le *valutazioni interne* degli insegnanti sono fortemente influenzate da fattori soggettivi, al punto che in matematica è molto più frequente che in altre discipline vedere in un ragazzo cambiamenti drastici di rendimento scolastico in corrispondenza di cambiamenti di insegnante». Inoltre, non dobbiamo dimenticare che gli stessi studenti considerano la valutazione fortemente dipendente dall'insegnante, più che dalle reali conoscenze acquisite.

Vi sono inoltre dei limiti ad una valutazione effettuata dall'insegnante di classe che tendono a "guidare" la risposta degli allievi verso quella attesa:

- uso da parte dell'insegnante di prassi e metodologie attese;
- comportamento secondo copioni standard da parte dell'allievo;
- attese reciproche tra docente e allievi che influenzano le risposte e le loro interpretazioni;
- uso in aula di un linguaggio condiviso che spesso già di per sé comporta risposte standard; infatti l'uso di una determinata terminologia da parte dell'insegnante, la sintassi delle frasi, i simboli, le rappresentazioni privilegiate rispetto ad altre, costituiscono a poco a poco un lessico familiare per i ragazzi che tendono ad interpretare le domande in base alle richieste non solo esplicite, ma soprattutto implicite dell'insegnante e, analogamente, ogni docente impara a leggere (e talvolta a decodificare) le risposte e gli elaborati degli allievi, interpretandoli alla luce sia delle caratteristiche personali di ognuno, che a volte dalle precedenti prestazioni.

L'obiettività della valutazione interna risulta quindi una chimera.

Al contrario, l'uso di strumenti di valutazione non preparati dall'insegnante ha il vantaggio di svincolare l'alunno da quelle clausole del contratto didattico che riguardano la verifica (più o meno esplicite).

Un test standardizzato realizzato da un organo nazionale (o anche internazionale) può essere lo strumento adatto per abbattere certi pregiudizi e valutare abilità e conoscenze, epurandole (almeno in parte) dai comportamenti che questi dettavano.

Risulta dunque importante per un insegnante accettare prove create esternamente alla classe, costruite da persone che non conoscono la storia cognitiva degli alunni, per verificare se c'è congruenza tra quel che effettivamente hanno costruito e le attese esterne, della collettività.

D'altra parte però le prove standardizzate non devono né possono sostituire la valutazione in classe dell'insegnante. Si pensi alle possibili complicazioni che ne potrebbero derivare e che sono ben espresse in Fandiño Pinilla (2005b):

- «smarrimento dello studente che non riconosce le metodologie usuali
- incapacità di gestire situazioni non abituali
- scontro con un linguaggio non usuale
- non riconoscimento degli obiettivi della valutazione

- non riconoscimento del senso delle richieste
- incongruenza tra gli apprendimenti raggiunti e la richiesta
- aumento delle interferenze emotive in presenza di valutatori esterni alla classe o alla scuola
- …».

Le prove standardizzate di IV elementare, oggetto di questa ricerca, rappresentano una prima tappa del percorso valutativo di tipo esterno, quindi risulta ancora limitata la possibilità di un confronto con prove precedenti, tra livelli scolastici diversi e riflessioni generali sul curricolo, ma offrono in ogni caso una buona panoramica utile dal punto di vista didattico. Tali tipi di test sono la risorsa fondamentale per il sistema di istruzione degli Stati perché, come suggerisce Fandiño Pinilla (2002), «sostengono un aggiornamento continuo delle istituzioni e dei docenti sugli ultimi risultati della ricerca favorendo la nascita di nuovi strumenti che consentono all'insegnante:

- di conoscere meglio lo studente;
- di mettere sotto analisi la propria trasposizione didattica (…);
- di affrontare in modo preparato un'analisi a priori e a posteriori dell'ingegneria didattica utilizzata, cioè di quell'insieme di azioni didattiche da lui organizzate per favorire un particolare apprendimento per la classe e la successiva valutazione;
- di valutare costantemente i curricola e le differenze che intercorrono tra gli obiettivi (ciò che volevamo ottenere) e i risultati (ciò che abbiamo ottenuto), cioè tra curricolo intended e curricolo implemented».

Come afferma Bolondi (2010): «Una valutazione esterna, pur con tutti i suoi limiti che anche in questa analisi affronteremo, permette all'insegnante di riequilibrare gli ambiti che sono oggetto di valutazione: è frequente che la trasposizione didattica e di conseguenza le verifiche interne si concentrino su particolari argomenti o su determinati processi, finendo per trascurarne altri e focalizzando di conseguenza in modo troppo specifico il lavoro degli allievi.[4] Questo tipo di valutazione permette inoltre di confrontare i risultati di apprendimento dei singoli allievi e della classe nel suo complesso con gruppi e popolazioni di vario tipo, e suggerire modalità di verifica diverse dalle abituali».

1.1.3. L'uso delle prove standardizzate da parte dei docenti

L'analisi dei risultati fatta da ogni insegnante, che ha sott'occhio da un lato le prove dei propri allievi e, dall'altro, i risultati complessivi, dovrebbe servire a mettere a fuoco la situazione complessiva della classe su questi aspetti, individuando le opportunità e i rischi nel percorso di apprendimento avviato.

Ogni contesto scolastico, ogni classe con i suoi insegnanti e i suoi allievi, hanno punti di forza e di debolezza dovuti a diversi fattori, come ad esempio le particolari competenze o esperienze degli insegnanti, una specifica tradizione d'insegnamento, la presenza di alunni di eccellenza, l'abitudine a collaborare con esperti di didattica disciplinare o con istituzioni extrascolastiche come musei o associazioni culturali. Tutto questo serve per leggere nel modo migliore e contestualizzare i dati della prova standardizzata.

[4] Si pensi da questo punto di vista all'importanza data in Ticino al calcolo, sottovalutando importanti temi trasversali come la risoluzione di problemi e ambiti di competenza come quello geometrico.

Da questo punto di vista, è importante analizzare sia una lettura statistica dei risultati, partendo dalla distribuzione percentile delle risposte dei ragazzi, sia una lettura più puntuale dal punto di vista didattico. A questo scopo si sono ritenuti utili per i docenti commenti e analisi dei distrattori[5] inseriti nei quesiti e delle risposte degli allievi.

È da considerare che molte volte le informazioni interessanti dal punto di vista didattico provengono dalle risposte sbagliate: sono queste scelte che permettono di mettere a fuoco aspetti dell'insegnamento/apprendimento o della valutazione che possono essere migliorati, o che suggeriscono interventi mirati sugli apprendimenti degli allievi.

L'errore in matematica, infatti, non può essere considerato semplicemente frutto di mancanza di conoscenze o abilità, esso può derivare da immagini o modelli che si sono costruiti in modo scorretto. Spesso, si tendono a sottovalutare gli errori così detti "sciocchi" compiuti dagli alunni, reputandoli semplicemente incidenti di percorso o causati da una momentanea distrazione (Zan, 2011a). Ci si illude che per superare tali difficoltà basti rispiegare o mostrare dove sta l'errore. Ma «l'azione didattica tesa a recuperare le conoscenze riprendendo gli argomenti oggetto di errori, rispiegandoli, ripetendoli, proponendo esercizi di rinforzo, risulta spesso inefficace soprattutto con gli allievi più deboli. Se si decide dunque non solo di registrare oggettivamente ed astrattamente l'errore, ma anche di intervenire, allora si pone in prima istanza il problema da parte dell'insegnante di rilevare l'errore, dunque di scoprirne la causa latente e profonda» (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008).

In realtà, i dati restituiti dalle prove, in questo caso sottoposte a 2935 bambini di V elementare per valutare le competenze raggiunte in IV elementare, hanno un effetto-leva enorme: amplificano, infatti, qualunque fenomeno e ci fanno capire come molti comportamenti non siano casuali, ma nascondano, invece, ostacoli profondi di diversa natura.[6]

In quest'ottica pensiamo sia fondamentale focalizzarsi non solo sui risultati positivi degli studenti, emersi da queste prove standardizzate, ma anche sull'analisi degli errori più diffusi commessi dagli allievi, con l'obiettivo quindi di fornire all'insegnante un utile strumento di lettura delle difficoltà in matematica. Quest'ultima può aiutare a mettere in luce misconcezioni, difficoltà di lettura e modelli non adeguati. Su tutti questi temi, la ricerca in didattica della matematica ha molto lavorato e disponiamo oggi di abbondante materiale. Ignorare questi studi comprometterebbe una corretta attività di valutazione del *modus operandi* in aula.

D'altra parte, come ricorda Bolondi (2011): «la matematica è una disciplina dai tempi lunghi e ogni miglioramento richiede tempo e pazienza e deve svilupparsi in un'ottica di lungo periodo. I cambiamenti più efficaci sono, quindi, quelli che intervengono sul metodo di insegnamento dei docenti o di lavoro e studio della classe e dei singoli allievi, e che possono tra l'altro modificare gli atteggiamenti dei ragazzi verso la disciplina».

La domanda che ogni insegnante dovrebbe farsi è: «Come posso usare i risultati di questa valutazione per migliorare l'efficacia del mio lavoro? Come posso utilizzare queste informazioni per migliorare i risultati di apprendimento dei miei allievi?».

[5] Un quesito a scelta multipla consiste in una domanda iniziale seguita da risposte, una sola delle quali è corretta, le altre, dette distrattori, sono verosimili. Nel rapporto INVALSI si sostiene: «i distrattori per "funzionare" debbono esser abbastanza plausibili da attrarre le scelte di una parte degli alunni, quelli, in pratica, che padroneggiano di meno l'abilità che la prova intende misurare. Se la risposta giusta venisse, a qualunque livello di abilità, sempre preferita rispetto ai distrattori, questa sarebbe un'indicazione molto forte – secondo le regole che presiedono alla costruzione di domande a scelta multipla – che i distrattori non funzionano e che vanno riformulati o sostituiti». (http://www.invalsi.it/esamidistato1011/documenti/Rapporto_tecnico_prove_invalsi_2011.pdf).

[6] La ricerca in didattica della matematica distingue tre tipologie di ostacoli all'apprendimento: ostacoli ontogenetici, didattici e epistemologici. Per un approfondimento si veda D'Amore, Sbaragli (2011).

Il docente può contestualizzare i risultati di queste prove attraverso la conoscenza della propria scuola e degli allievi e leggerli nel modo più efficace. Può così individuare *ambiti/aspetti di competenza* nei quali i ragazzi (o una parte di essi) incontrano particolari difficoltà, nei quali il percorso può venire rafforzato (ad esempio modificando la trasposizione didattica e l'ingegneria didattica, introducendo nuove modalità di valutazione, rimettendo a fuoco gli obiettivi, …), e punti di forza sui quali far leva per stimolare l'eccellenza o favorire il recupero di studenti in difficoltà. Le prove, in definitiva, sono uno strumento *in più* in mano all'insegnante: uno strumento che ha il vantaggio di fornire dati confrontabili con quelli di un campione, e quindi di restituire *oggettività* alla valutazione del docente.

In Bolondi (2010) troviamo un'analogia che aiuta a chiarire questa idea: «L'analogia forse più semplice è quella del medico. La persona che meglio può fare una valutazione del quadro di salute di un paziente è il medico di base che ne conosce la storia, le malattie precedenti e le caratteristiche personali. Questa valutazione però si appoggia su dati in qualche modo oggettivi che il medico interpreta: la pressione arteriosa, la temperatura corporea, e altri tipi di esami eventualmente molto mirati. Il mio medico sa, conoscendomi, se per me una pressione massima di 140 è normale, alta o bassa. L'importante è che abbia a disposizione uno strumento affidabile per misurarmi la pressione, un laboratorio sicuro da cui ricevere i dati sui miei esami del sangue. Non è il dato sulla pressione che mi dice da solo come sto di salute, ma un buon medico ha bisogno anche di questo per effettuare una valutazione fondata».

Uno degli obiettivi della valutazione didattica delle prove standardizzate è quello di fornire alla scuola, e quindi agli ispettori, ai dirigenti, agli insegnanti e, in definitiva, agli studenti e alle famiglie, uno strumento utile in quest'ottica.

Si tratta dunque di accettare queste prove come un contributo alla propria azione didattica, come un aiuto a riconoscere, classificare e valutare i processi complessi di insegnamento/apprendimento della matematica. Esse vanno viste anche come un suggerimento contenutistico e metodologico implicito che non lede in alcun modo la libertà di insegnamento, né potrebbe farlo.

Siamo convinti che ogni paese abbia bisogno di questo tipo di valutazioni se vuole investire su un'istruzione di qualità. Attraverso di esse è infatti possibile avere un'immagine riflessa del sistema di istruzione e, con il confronto, guardare questa immagine in modo ancora più ragionato e consapevole (Mons, 2009).

La tematica della valutazione e del monitoraggio del proprio sistema di istruzione sta diventando, per questo, sempre più importante in tutti gli Stati. A parte qualche eccezione, in Europa, a partire dagli anni '90, la maggior parte dei paesi ha sviluppato una cultura delle prove standardizzate come strumento di regolazione, proponendole sistematicamente. In Francia, già dal 1977, in Austria dal 2003, in Germania dal 2005 e in Italia dal 2008 (Eurydice, 2009). Il processo è però ancora in una fase di assestamento tra le varie parti coinvolte: istituzioni, insegnanti, studenti, società, ... per questo occorre rifletterci con sempre maggiore forza e consapevolezza.

La valutazione esterna, per quanto spesso si sostenga non necessaria, si conferma l'unica che permette di pianificare azioni ad ampio raggio, che con una visuale globale possa intervenire e costituire valore aggiunto alla qualità dell'istruzione dei vari paesi.

1.2. Le prove di matematica

Nei primi mesi dell'anno scolastico 2011-2012 si è svolto un test pilota che consisteva in due prove di matematica eseguite in alcune classi campione di V elementare (110 classi, 1591 allievi). I relativi quesiti sono stati elaborati da un gruppo composto da docenti di scuola elementare e di scuola media ed esperti di matematica; i risultati sono stati analizzati dai ricercatori del CIRSE con la consulenza di Urs Moser dell'Institut für Bildungsevaluation (IBE) dell'Università di Zurigo per l'uso del modello statistico della *"Item Response Theory"* (IRT), alla base di queste prove, così come delle principali valutazioni internazionali (PISA *in primis*). Si è dovuto creare un numero di quesiti sovrabbondante rispetto all'uso finale, perché era necessario prevedere che, successivamente alla prova campione, sarebbe stato eliminato almeno il 30% dei quesiti. L'analisi ha portato alla selezione di una batteria di 120 quesiti statisticamente validi e attendibili di vari livelli di difficoltà, riconducibili a una parte dei contenuti implicati nel programma di matematica all'ora in vigore, risalente al 1984, ma riletti in chiave futura secondo l'ottica di *ambiti e aspetti di competenza*.

I 120 quesiti selezionati sono stati ripartiti in uguale numero in due fascicoli, sottoposti in due diversi momenti nell'ottobre 2012 alla totalità degli allievi ticinesi di quinta elementare (2935), allo scopo di verificare il raggiungimento di alcune competenze previste per il 6° anno di scolarità (IV elementare), non a testare gli standard, ossia le "competenze fondamentali per la matematica" - cioè quelle competenze che devono essere raggiunte dalla maggioranza degli allievi al termine del 4°, 8° e 11° anno scolastico previste dal concordato HarmoS. In particolare, i 2935 allievi erano distribuiti su 186 classi delle scuole pubbliche, di cui 68 pluriclassi. Tra i 2935 allievi, 619 (21,1%) frequentavano una pluriclasse.

1.2.1. Gli ambiti e gli aspetti di competenza valutati e il nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo

La scelta degli *ambiti di competenza* individuati per le prove standardizzate di IV elementare è stata: "Numeri e calcolo", "Geometria", "Grandezze e misure" e "Analisi dati e relazioni". In realtà quest'ultimo, secondo le Competenze fondamentali per la matematica (2011) e il nuovo Piano di studio per la scuola dell'obbligo attualmente in consultazione, rientra tra le risorse sviluppate all'interno dell'ambito "Numeri e calcolo" fino all'ottavo anno di scolarità. Va tenuto in considerazione che i quesiti sono stati creati prima della pubblicazione di tali documenti.

Nel nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo si è ritenuto che per gli ambiti "Funzioni" e "Dati e caso" - riassunti dai creatori dei quesiti con il nome "Analisi dati e relazioni" - non sia ragionevole definire delle competenze fino all'8° anno di scolarità, ma si possono comunque individuare loro elementi preparatori presentati all'interno dell'ambito "Numeri e calcolo", che diventeranno modelli adeguati nel III ciclo. Infatti, pur essendo previste, per ogni anno di scolarità, attività didattiche concernenti tutti gli ambiti, una gran parte di esse costituiscono attività di sensibilizzazione e di introduzione a temi che solo più tardi, dopo un adeguato processo di insegnamento/apprendimento e di maturazione, potranno diventare competenze.

Lo sviluppo sull'arco dei tre cicli della scuola dell'obbligo dei vari ambiti di studio secondo il nuovo Piano di studio può essere illustrato come segue.

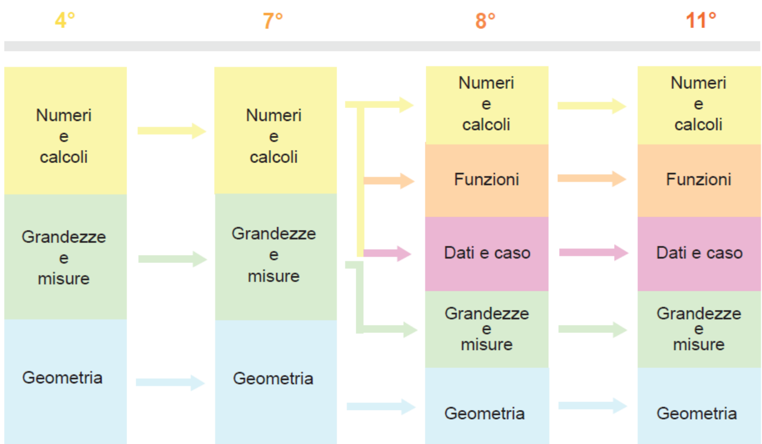


Figura 1: Sviluppo degli ambiti di competenza in base agli anni di scolarità

Tenendo conto del nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo, attualmente in consultazione, le descrizioni degli ambiti di competenza rientranti nei fascicoli somministrati sono, quindi, le seguenti.

Numeri e calcolo

Gli oggetti di studio in questo ambito sono i numeri e la struttura dei vari insiemi numerici. È previsto un graduale ampliamento dai numeri naturali ai reali, comprendente i principali concetti e le proprietà delle operazioni con le loro applicazioni nel calcolo, che trova la sua principale ragione d'essere come strumento nei processi risolutivi di situazioni-problema nel cui contesto va opportunamente sviluppato ed esercitato. Rispetto al passato, il calcolo a scuola assume oggi una nuova connotazione alla luce della diffusione generalizzata dei più svariati mezzi tecnologici in grado di eseguire calcoli di ogni tipo. Il tradizionale tecnicismo legato agli algoritmi di calcolo non è più indispensabile dal punto di vista strumentale. Per contro diventano importanti le competenze relative all'uso sensato ed efficace degli strumenti tecnologici, che comprende la capacità di stimare e di interpretare i risultati forniti dalla macchina. In tale contesto, il calcolo mentale assume un'importanza prioritaria, come risorsa necessaria sia per eseguire un calcolo o per approssimarlo (stima in situazioni di incertezza, stima del risultato di una sequenza di calcolo), sia per lo sviluppo di determinati concetti e algoritmi concernenti i vari insiemi numerici (fondati essenzialmente sulle proprietà delle operazioni, sulla gerarchia di quest'ultime e sull'uso delle parentesi).

L'ambito numerico offre inoltre numerose possibilità di sviluppare al suo interno percorsi concernenti tre importanti nuclei tematici - legati alle relazioni fra insiemi di numeri o di grandezze, al trattamento/analisi di dati e alla valutazione di situazioni di incertezza - che nel 3° ciclo si svilupperanno in modo autonomo dando origine agli ambiti "Funzioni" e "Dati e caso".

Sintesi dei contenuti di questo ambito, per cicli:

1° ciclo	Numeri naturali, addizione e sottrazione, calcolo mentale, mentale-scritto soprattutto nell'ambito di situazioni-problema.
2° ciclo	Numeri naturali, numeri decimali, le quattro operazioni, calcolo mentale, mentale-scritto e scritto soprattutto nell'ambito di situazioni-problema; frazione come operatore, come quoziente, come rapporto di due numeri naturali.
3° ciclo	Numeri reali, frazioni, radici, potenze, calcolo approssimativo e strumentale, calcolo letterale, equazioni, disequazioni, sistemi.

Geometria

L'ambito "Geometria" ha come oggetto di studio le figure e le loro proprietà viste secondo due ottiche:

- la geometria sintetica, che si occupa essenzialmente degli aspetti qualitativi delle figure (bi- e tridimensionali), mettendo in risalto proprietà comuni a figure diverse (formazione di classi di figure) e proprietà diverse (suddivisione in sottoclassi). Un cenno alle trasformazioni del piano in se stesso può facilitare la scoperta delle proprietà di figure anche non convenzionali, e dare maggior senso al riconoscimento di assi e centri di simmetria, di centri di rotazione, di movimenti di traslazione;

- la geometria metrica, che si occupa di problemi essenzialmente quantitativi concernenti le figure (concetti e calcolo di lunghezze, aree, volumi e ampiezze); particolare importanza viene data ad alcune figure basilari con lo sviluppo di procedure chiave e al concetto di figura composta, sia nel piano, sia nello spazio. Questo aspetto è strettamente connesso con l'ambito "Grandezze e misure" per quanto concerne i concetti di grandezza, misura, unità di misura e relazioni esistenti fra di esse.

La geometria rappresenta la prima rappresentazione del mondo fisico; per questo, dal punto di vista didattico, il rapporto tra intuizioni connesse all'esperienza e il ragionamento geometrico resta fondamentale. In effetti, nei primi gradi scolastici la geometria è volta a organizzare l'esperienza visiva, tattile, motoria degli allievi e volge l'attenzione su alcune caratteristiche spaziali degli oggetti, per poi procedere per razionalizzazioni successive di queste prime osservazioni.

Sintesi dei contenuti di questo ambito, per cicli:

1° ciclo	Linguaggio necessario per situarsi e muoversi nello spazio; figure geometriche legate al mondo famigliare del bambino, tridimensionali e bidimensionali.
2° ciclo	Nozioni fondamentali della geometria; principali figure del piano e dello spazio, loro elementi costitutivi e proprietà.
3° ciclo	Figure piane composte, figure simili, prismi, piramidi, coni e sfera; sistemazione delle proprietà di alcune figure; avvio alla giustificazione razionale.

Grandezze e misure

Questo ambito permette di comprendere come si passa da un fenomeno del mondo reale alle principali grandezze numeriche che lo descrivono. In effetti, per comprendere che cosa si deve misurare è necessario entrare in contatto (percepire) con gli oggetti del mondo esterno, fare attività di stima, classificazione, comparazione tra le quantità e sviluppo delle tecniche di misura. La determinazione da parte dell'allievo dell'ordine di grandezza degli oggetti reali può essere conseguita solo attraverso l'esperienza che egli ha acquisito per mezzo di misurazioni concretamente effettuate. Nel 2° e soprattutto nel 3° ciclo, si possono gradualmente considerare situazioni sempre più astratte, con opportune formalizzazioni.

In particolare, durante la scolarità obbligatoria occorre sistemare le conoscenze che gravitano attorno ai concetti di grandezza, misura, unità di misura (con particolare riguardo al Sistema Internazionale delle Unità e alla Legge federale sulla metrologia), oltre naturalmente alle procedure di calcolo di alcune grandezze e di conversione fra misure espresse secondo unità diverse, il più possibile contestualizzate in situazioni-problema significative.

Tale ambito è quindi strettamente correlato con gli aspetti numerici e geometrici. Oltre alle grandezze geometriche (lunghezza, area, volume, ampiezza) sono da prendere in considerazione capacità, massa, tempo, denaro e altre grandezze a seconda delle situazioni affrontate.

Sintesi dei contenuti di questo ambito, per cicli:

1° ciclo	Tempi della vita quotidiana e loro ciclicità, lunghezze, masse, estensioni; stima; misura di oggetti del reale.
2° ciclo	Principali grandezze (denaro, lunghezza, area, massa, tempo, capacità); loro unità di misura usuali, stima e calcolo di misure di oggetti del reale e ideali.
3° ciclo	Le grandezze più ricorrenti nelle odierne attività umane; simboli e prefissi usuali e loro nesso con la struttura del sistema metrico decimale fondata sulla rappresentazione mediante potenze di 10.

Gli ***aspetti di competenza*** coinvolti per l'ambito "Numeri e calcolo" sono: "Eseguire e applicare" e "Argomentare e giustificare"; per l'ambito "Geometria": "Sapere, riconoscere e descrivere" e "Eseguire e applicare"; per l'ambito "Grandezze e misure": "Eseguire e applicare", per l'ambito "Analisi dei dati e relazioni": "Sapere, riconoscere e descrivere".

Trattandosi di aspetti che si manifestano nel contesto dell'espressione di una competenza da parte dell'allievo, devono essere intesi come tipo di prestazione - con una componente cognitiva e un'altra di atteggiamento - che l'allievo è in grado di fornire nel momento in cui affronta e risolve una situazione matematica.

Sapere, riconoscere e descrivere

Sapere: comprende le prestazioni legate al sapere, concernenti principalmente due filoni paralleli di apprendimenti: concettuale (conoscenza dell'oggetto matematico in gioco e del suo significato) e algoritmico (conoscenza di procedure).

Riconoscere: comprende il saper distinguere (associando termini e simboli ai rispettivi oggetti e viceversa) e il saper usare in modo pertinente termini e simboli riferiti a un concetto.

Descrivere: prevede la descrizione di un concetto o di un processo in una prima fase, per poi passare a una loro definizione.

Eseguire e applicare

È costituito da quegli aspetti del saper fare legati all'esecuzione di procedimenti e algoritmi in modo non automatizzato, in cui è previsto l'intervento cosciente e che sottintende il riconoscimento di una situazione e un adattamento alla stessa. In particolare, eseguire calcoli, trasformazioni e costruzioni con o senza mezzi ausiliari, applicare procedimenti e concetti disciplinari specifici dei vari ambiti di competenza.

Argomentare e giustificare

La capacità di giustificare e argomentare affermazioni concernenti una situazione-problema, un concetto, un procedimento matematico, di chiarire e giustificare ad altri le proprie riflessioni e procedure, di illustrare in diversi registri semiotici un sapere, di capire e riprodurre controesempi.

In sintesi, gli ambiti e gli aspetti di competenza coinvolti in questa analisi sono:

A. *Geometria* - Sapere, riconoscere e descrivere (GEO – SRD)
B. *Geometria* - Eseguire e applicare (GEO – EA)
C. *Grandezze e misur*e - Eseguire e applicare (GM – EA)
D. *Numeri e calcolo* - Eseguire e applicare (NC – EA)
E. *Numeri e calcolo* - Argomentare e giustificare (NC – AG)
F. *Analisi dati e relazioni* - Sapere, riconoscere e descrivere (AR – SRD).

1.2.2. I fascicoli somministrati e organizzazione della somministrazione

È stato possibile realizzare due fascicoli, ognuno contenente 60 quesiti disposti su tre ambiti/aspetti di competenza. Il primo fascicolo somministrato comprende 20 quesiti per A, 20 per E, altri 20 per F. Il secondo fascicolo, invece, comprende 20 quesiti per B, 20 per C e altri 20 per D. I quesiti sono stati inseriti nei fascicoli in ordine di difficoltà e ruotati per settore.

Nel costruire i quesiti, gli autori hanno dovuto tener conto che essi dovevano essere quanto più possibile “mono dimensionale”. Per misurare la capacità di discriminazione del quesito e anche la sua coerenza con l’ambito/aspetto che si desiderava valutare è infatti necessario che ogni quesito sia attinente in prevalenza a uno e un solo ambito/aspetto di competenza. Questa caratteristica rende i quesiti in sé differenti da quelli che normalmente sono utilizzati dai docenti durante la loro attività professionale e meno ricchi e significativi dal punto di vista didattico.

Sono stati utilizzati più quesiti per ciascuna categoria al fine di identificare in modo più preciso l’abilità di ogni allievo nel settore stesso. La presenza di soli tre settori all’interno di ogni fascicolo è legata al bisogno di non imporre eccessivi cambi di contenuto agli allievi stessi. Va però osservato che, come emerge dal commento didattico dei risultati di ciascun quesito, alcuni di questi non rientrano nell’ambito o nell’aspetto di competenza per il quale dovevano essere pensati, ma bensì sono più finalizzati ad indagare altri ambiti o aspetti, ciò emerge soprattutto per alcuni quesiti di “Geometria” che in realtà fanno parte di “Grandezze e misure”.

Le tipologia di quesiti somministrati per ciascun ambito/aspetto di competenza sono le seguenti:

Ambito e relativo aspetto di Competenza	**Quesiti a risposta aperta univoca**	**Quesiti a risposta aperta articolata**	**Quesiti a risposta chiusa**	**Totale**
Geometria **Sapere, riconoscere e descrivere**	2	0	18	20
Geometria **Eseguire e applicare**	9	0	11	20
Grandezze e misure **Eseguire e applicare**	5	0	15	20
Numeri e calcolo **Eseguire e applicare**	7	0	13	20
Numeri e calcolo **Argomentare e giustificare**	0	3	17	20
Analisi dati e relazioni **Sapere, riconoscere e descrivere**	15	0	5	20

Legenda esplicativa

Quesiti a risposta chiusa: domande con risposta a scelta multipla che presentano alcune (in questo caso da 2 a 7) alternative di risposte, una sola delle quali è corretta.

Quesiti a risposta aperta univoca: domande in cui la risposta corretta è rigidamente definibile a priori (richiesta di un risultato univoco).

Quesiti a risposta aperta articolata: domande che richiedono la descrizione di un calcolo o di un procedimento oppure la giustificazione di una risposta o di una scelta.

Tabella 1: Tipologia di quesiti somministrati

Come emerge dalla tabella 1, la maggior parte dei quesiti è a risposta chiusa o aperta univoca, ciò facilita ovviamente il lavoro di codifica dei risultati, ma fornisce minori informazioni sull’apprendimento degli allievi. Dal punto di vista didattico la tipologia che risulta più significativa è quella aperta articolata, che consente di analizzare il processo risolutivo effettuato dall’allievo, e non solo il prodotto, e di vedere in alcuni casi la giustificazione delle scelte effettuate. Questa analisi sarebbe più interessante e approfondita se fosse ulteriormente accompagnata da una successiva intervista agli allievi.

Va anche considerato che i quesiti a risposta chiusa avevano una grande varietà di opzioni di scelta: da due a sette. I quesiti a risposta chiusa con la scelta di solo due o tre opzioni risultano molto deboli come tipologia di quesiti dal punto di vista statistico, quindi sarebbero da evitare in futuro, andando verso la tipologia maggiormente utilizzata a livello internazionale, quella con quattro opzioni, una giusta e tre sbagliate, o cinque.

Questi due fascicoli sono stati distribuiti in tutte le classi di quinta elementare, in modo che ogni allievo si confrontasse con tutti i quesiti. La finestra di tempo nella quale questa prova doveva avvenire è stata di due settimane. In ogni classe la somministrazione della seconda prova doveva avvenire a distanza di una settimana dalla prima. Questa distanza temporale è stata scelta al fine di ridurre l'effetto di apprendimento legato al rispondere a quesiti costruiti con modalità di risposta analoghe. Sono stati lasciati 45 minuti di tempo per terminare ciascun fascicolo. Dal nostro punto di vista, 60 quesiti, distribuiti per difficoltà crescente risultano troppi da gestire per allievi di inizio V elementare, e non solo. Crediamo quindi che la lunghezza di ciascun fascicolo e il tempo assegnato siano due aspetti da regolare nelle successive somministrazioni.

Quasi il 90% degli allievi ha svolto le prove alla presenza del docente, il 10% invece le ha svolte con la supervisione di una persona esterna che ha curato la distribuzione dei fascicoli. Anche questo aspetto andrà regolato in futuro, assegnando la somministrazione a persone esterne per non creare disparità di trattamento e per avere risultati più neutri e oggettivi. Si deve ricordare, inoltre, che gli insegnanti non erano coinvolti nella correzione della prova stessa e quindi non avevano la possibilità di relativizzare i risultati dei singoli allievi rispetto ai percorsi individuali degli stessi.

1.2.3. Codifica dei risultati dei quesiti

Le risposte ai 120 quesiti sono state codificate dal CIRSE in corrette e sbagliate (1 e 0) e in non risposte o da annullare (9), in modo da rendere dicotomica la scala di risposta anche nei casi in cui questa fosse politomica o aperta. Questo perché nel caso di non risposte è necessario interrogarsi sulle ragioni di questo fenomeno (per esempio: problemi di tempo, di consegna, di eccessiva difficoltà), nel caso di risposte errate si deve invece approfondire rispetto al livello di difficoltà del quesito.

I risultati dei quesiti sono stati resi omogenei riportandoli a una scala da 0 a 100, 0 corrisponde a sole risposte errate e 100 corrisponde a sole risposte corrette. Nel rapporto del CIRSE (2014) sono riportate le analisi dei risultati delle prove, distribuiti per circondari, in base al grado di urbanizzazione del comune, alle dimensioni dell'istituto, alle dimensioni delle classi, al genere del docente, all'esperienza del docente, ai docenti full o part-time, alla nazionalità degli allievi e composizione della classe, al genere dell'allievo, all'origine sociale, all'età dell'allievo, alla corrispondenza tra note scolastiche e risultato delle prove, alla modalità di somministrazione delle prove. Rimandiamo quindi a questo documento per un approfondimento.

Invece, per riuscire a effettuare un'adeguata analisi didattica dei risultati, che non coinvolgesse solo il giusto o sbagliato, ma potesse indagare anche il tipo di risposta fornita e l'eventuale errore commesso dall'allievo, in questa ricerca abbiamo considerato la totalità di risposte (2935) per le risposte chiuse, mentre abbiamo individuato per le risposte aperte univoche o articolate un campione significativo di protocolli (414) e abbiamo riportato tutte le risposte degli allievi, selezionando anche i protocolli più significativi da integrare nel commento.

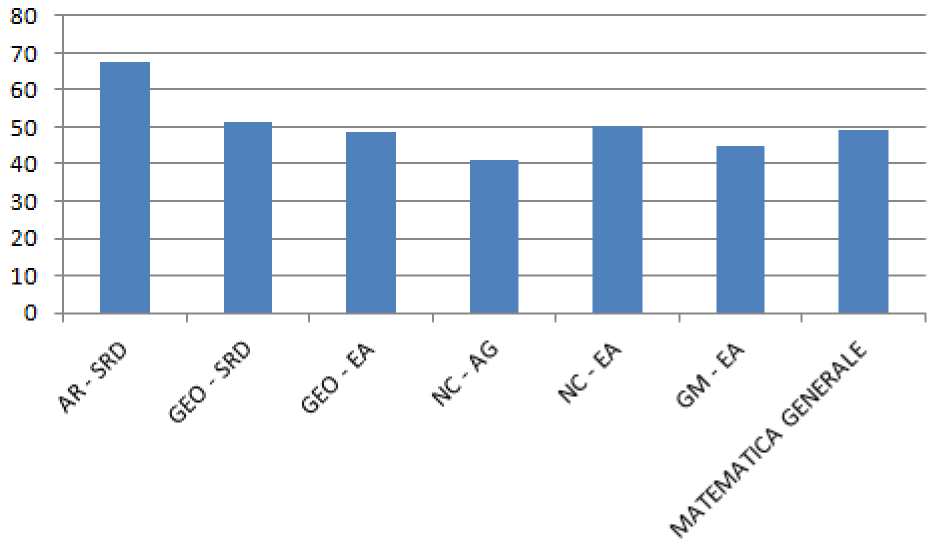
1.2.4. Sintesi dei risultati dei quesiti ottenute dal CIRSE

La tabella 2 riassume le medie dei risultati degli allievi nei sei settori della matematica contemplati dalle prove. “Matematica generale” è quella variabile costituita dalla media dei punteggi di tutti i settori. Questa è stata calcolata per ogni allievo e può essere considerata come un indicatore della sua prestazione. Come si può notare, il settore “Analisi dati e relazioni/sapere riconoscere e descrivere”, registra il punteggio medio più elevato (67,24) (vale la pena di ricordare che, come riportato in CIRSE (2014), in questo settore vi erano pochi quesiti di difficoltà elevata), mentre il punteggio medio più basso si osserva, come era prevedibile, in “Numeri e calcolo/argomentare e giustificare” (41,16). In effetti la competenza di “argomentare e giustificare” risulta più complessa rispetto a “sapere, riconoscere e descrivere” o “eseguire e applicare”, anche a causa delle prassi didattiche che spesso non mirano a sviluppare tale aspetto. In “Matematica generale” gli allievi ottengono mediamente il punteggio 48,90. Come già ricordato, tutti i punteggi sono stati normalizzati in modo da assumere valori compresi tra 0 e 100. I punteggi non equivalgono a percentuali corrispondenti al numero di quesiti svolti correttamente: ottenere 50 in un certo settore non significa aver svolto correttamente il 50% dei quesiti di quel settore. In ciascun settore i quesiti sono stati ponderati per il rispettivo coefficiente di difficoltà (i coefficienti di difficoltà sono stati calcolati nell’ambito della *item response theory*). In pratica chi ha svolto correttamente i quesiti con elevato coefficiente di difficoltà ottiene un punteggio superiore a chi ha svolto un uguale numero di quesiti con coefficiente di difficoltà inferiore. Per un approfondimento si veda CIRSE (2014).

	Analisi dati e relazioni; sapere, riconoscere e descrivere	Geometria; sapere, riconoscere e descrivere	Geometria; eseguire e applicare	Numeri e calcolo; argomentare e giustificare	Numeri e calcolo; eseguire e applicare	Grandezze e misure; eseguire e applicare	Matematica generale
Punteggio medio	67.24	51.39	48.57	41.16	50.26	44.63	48.90
N[4]	2929	2929	2909	2929	2909	2910	2903

Tabella 2: I punteggi medi riportati dagli alunni nei sei settori e in “Matematica generale”

Tali risultati sono visualizzati nel seguente grafico:



Il CIRSE (2014) ha anche effettuato un’analisi fattoriale finalizzata a comprendere che tipo di relazione abbiano i sei settori matematici tra loro. È stato così possibile verificare che esiste una relazione positiva tra il punteggio ottenuto in un settore e quello ottenuto in ciascun altro.

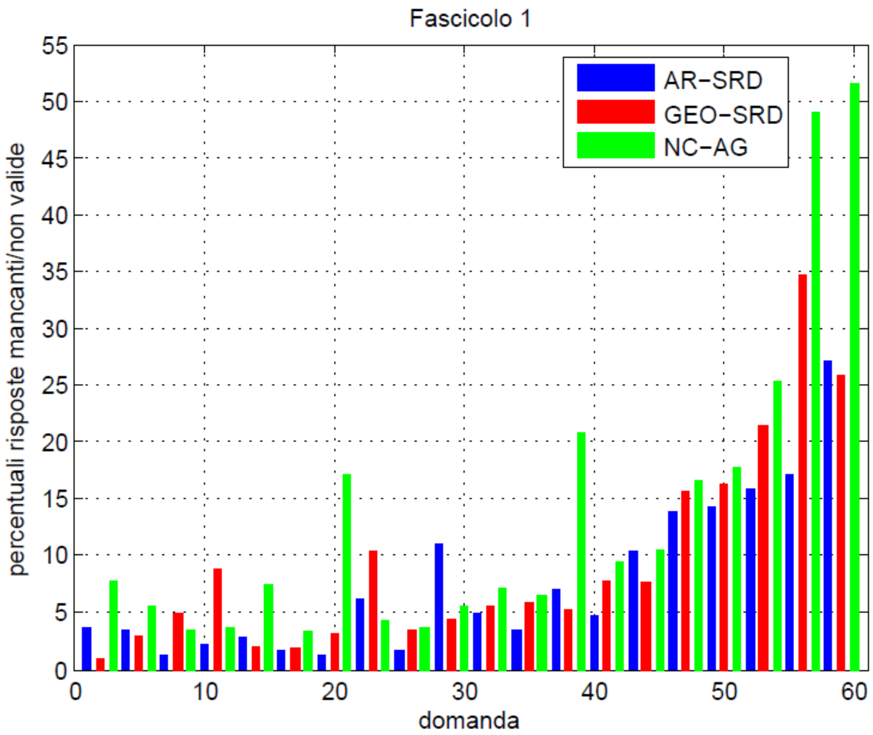
Chi ottiene punteggi elevati in un settore li ottiene tendenzialmente anche negli altri e lo stesso avviene per gli allievi che hanno ottenuto punteggi bassi. Si è anche potuto rilevare come i risultati della somministrazione siano coerenti con le valutazioni espresse dagli insegnanti. Questa considerazione, da un lato, fa intuire come la prova sia coerente nel merito e nello sviluppo a quanto viene svolto in classe, dall'altro lato, essendo una prova standardizzata più oggettiva della valutazione quotidiana espressa in classe, porta a supporre che nella scuola elementare in Ticino ci siano delle prassi di valutazione molto precise nel rilevare la preparazione degli allievi. La parte valutata in questa prova è molto limitata rispetto a quanto studiano gli allievi durante l'anno e il fatto che vi sia una correlazione elevata può infatti indicare che i settori rilevati diano delle informazioni significative sull'apprendimento nel suo complesso.

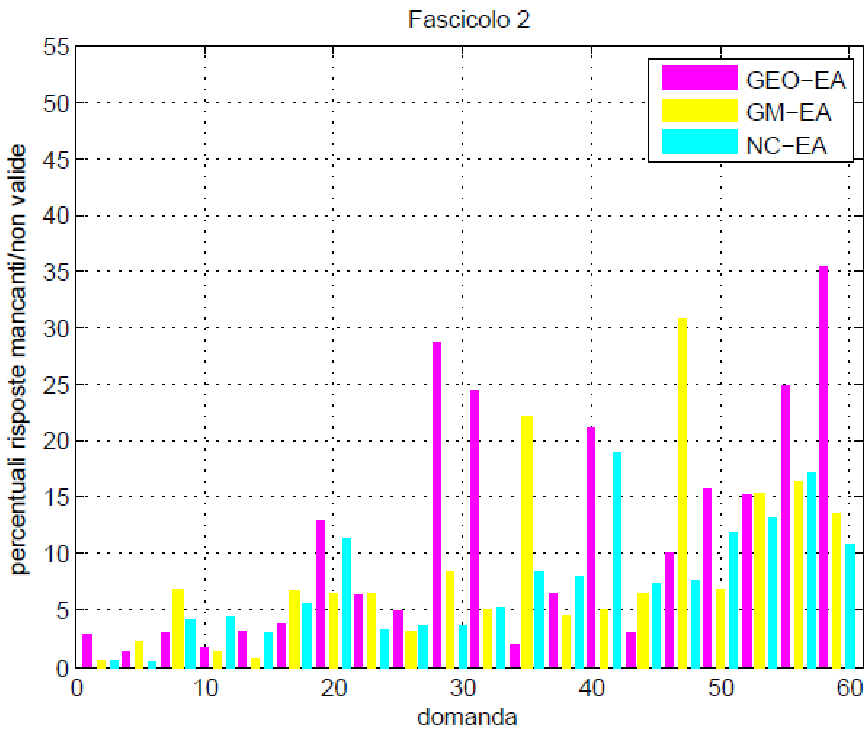
1.2.5. La nuova lettura dei risultati

Nei prossimi capitoli viene presentata la valutazione didattica emersa dall'analisi puntuale dei risultati dei 120 quesiti somministrati, divisa in ambiti e aspetti di competenza e a sua volta suddivisa nei vari argomenti matematici trattati. Per ogni quesito è stato indicato il riferimento della tematica in oggetto tratta dai Programmi del 1984 e dal nuovo Piano di Studio della scuola dell'obbligo attualmente in consultazione, accompagnata da un'analisi e da un'interpretazione dettagliata dei risultati, ricca di riferimenti teorici e di significativi protocolli.

Si sono in seguito analizzati in maniera trasversale i 120 quesiti per rilevare se gli allievi sono riusciti a mobilitare un determinato sapere nei diversi ambiti e aspetti di competenza messi in gioco. Questa analisi ha permesso di mettere in luce punti di forza e di criticità degli allievi di IV elementare in determinati argomenti matematici.

Per quanto concerne le risposte mancanti o non valide, in questa analisi abbiamo osservato un crescente e sostanziale aumento che sembra testimoniare ciò che avevamo ipotizzato dopo aver osservato i fascicoli consegnati agli alunni, ossia che 60 quesiti di tipologie diverse siano troppi da affrontare per allievi di scuola elementare, indipendentemente dalla difficoltà e dal tempo dato a disposizione, e che risulta quindi necessario diminuirne il numero nelle somministrazioni future. Di seguito si riportano i grafici dove emerge la crescita delle risposte mancanti o non valide fornite ai quesiti dei due fascicoli somministrati.





Ci auguriamo che questo lavoro di ricerca possa risultare un utile strumento di riflessione per migliorare le prove future e un importante supporto per gli insegnanti per riflettere con sempre maggiore consapevolezza sui processi di insegnamento/apprendimento della matematica e sulle scelte della trasposizione e ingegneria didattica, così da avere proficue ricadute nella formazione dei propri allievi.

2. Geometria – Sapere, riconoscere e descrivere

Per quanto riguarda i quesiti relativi all'ambito "Geometria", aspetto di competenza: "Sapere, riconoscere e descrivere", si nota una forte prevalenza di domande incentrate sul sapere e sul riconoscere, mentre risulta praticamente assente il descrivere. I 20 quesiti somministrati sono stati ripartiti in 6 tematiche per focalizzare maggiormente i commenti didattici. La ripartizione individuata è la seguente: posizioni di rette nello spazio (1 quesito), ampiezza dell'angolo (4 quesiti), triangoli e loro proprietà (4 quesiti), quadrilateri e loro proprietà (5 quesiti), cerchio e suoi elementi (3 quesiti), figure dello spazio (1 quesito), simmetria assiale (2 quesiti). I quesiti relativi all'ampiezza dell'angolo trovavano una collocazione più adeguata nell'ambito di competenza: "Grandezze e misure".

Le tipologie di domande somministrate sono: 2 a risposta aperta univoca (di cui una in realtà sostanzialmente chiusa) e 18 a risposta chiusa. Tra i quesiti a risposta chiusa 3 hanno 2 sole opzioni di scelta, 4 hanno 3 opzioni, 9 hanno 4 opzioni (a nostro parere le più adeguate per la classe sottoposta alla somministrazione), 1 ha 5 opzioni e 1 ha 6 opzioni.

Nelle tabelle 1-2 sono riportate le risposte ai 20 quesiti, con l'indicazione delle percentuali ottenute, suddivise per tipologia: risposta chiusa, aperta univoca o aperta articolata. Sono state evidenziate le risposte corrette. Il testo di ciascun quesito con le relative percentuali di riuscita, l'individuazione della tematica relativa ai quesiti nei Programmi del 1984 e nel nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e il relativo commento didattico sono presentate di seguito. Le percentuali riportate nelle seguenti tabelle sono state calcolate in base ai risultati dell'intera popolazione di allievi (2935), alla quale sono stati somministrati i fascicoli. Per l'analisi dei protocolli e delle risposte date ai soli quesiti a risposta aperta univoca o articolata è stato selezionato un campione significativo di 414 studenti. Le percentuali riportate nelle tabelle a fianco di ciascuno dei quesiti sono state calcolate sul suddetto campione.

• Quesiti a risposta chiusa

Domanda	Risposte (%)						Mancante/ Non valida (%)
	a	b	c	d	e	f	
A1	84,1	13,0					2,9
A2	79,3	15,7	3,0				2,0
A3	1,8	10,9	51,5	28,1			7,7
A4	16,6	13,5	65,4				4,5
A5	2,5	60,6	17,2	14,2			5,5
A7	5,2	4,4	19,1	47,4	8,4		15,5
A8	13,3	33,0	13,9	14,0			25,8
A9	32,5	51,0					16,5
A10	10,9	76,8	5,3	3,9			3,1
A11	77,4	4,3	9,5				8,8
A12	10,9	9,5	76,1				3,5
A14	10,0	54,6	9,6	19,9			5,9
A15	98,0	0,5	0,1	0,4			1,0
A16	6,3	5,7	74,1	3,4			10,5
A17	19,0	17,8	28,2	13,3			21,7
A18	16,1	79,4	1,7	0,2	0,5	0,2	1,9
A19	1,6	1,9	10,6	80,9			5,0
A20	39,1	55,7					5,2

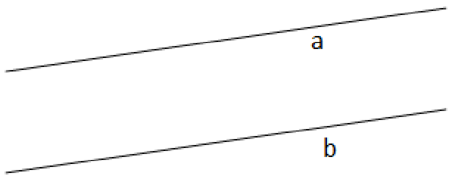
• Quesiti a risposta aperta univoca

Domanda	Risposta corretta (%)	Risposta errata (%)	Mancante/ Non valida (%)
A6	49,7	42,5	7,8
A13	29,6	35,7	34,7

Tabella 1-2: Risposte alle diverse tipologie di quesiti

2.1. Posizioni di rette nello spazio

A1) Osserva l'immagine.



Una delle seguenti affermazioni è corretta. Quale?

a) La retta a e la retta b sono parallele.
b) La retta a e la retta b sono perpendicolari.

Risposta corretta: a

Risultati:

a	**b**	**Mancante/ Non valida**
84,1	13,0	2,9

Programmi '84:
Figure geometriche
Ripresa delle rette parallele e perpendicolari e loro definizione.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).

Il quesito richiede di individuare le posizioni reciproche di due rette nel piano disposte in posizione non standard (solitamente vengono disposte orizzontalmente rispetto al lettore). Questo argomento è tipicamente affrontato dai docente fin dalla terza elementare, per essere in seguito ripreso in IV, rappresentando così un tema di consolidamento per questa classe. La percentuale di riuscita risulta alta (84,1%), anche perché il quesito prevede la scelta di solo due risposte chiuse basate sulla distinzione dei termini parallele e perpendicolari.

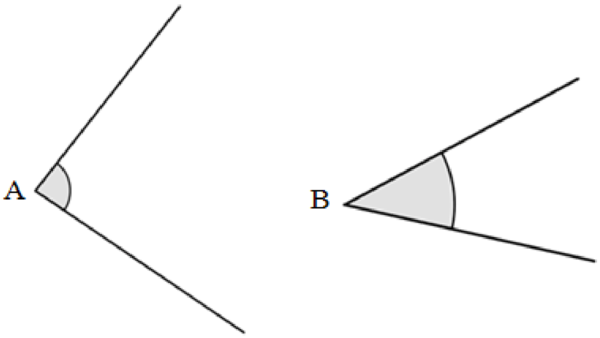
Didatticamente tale argomento viene a volte proposto senza tener conto delle posizioni delle rette nello spazio, ma solo sul piano, non contemplando così l'opportunità di considerare rette sghembe, ossia rette che non hanno un piano in comune.

Alcuni allievi non considerano il parallelismo e la perpendicolarità come relazioni di equivalenza tra due rette, ma parlano di retta parallela o retta perpendicolare come se fosse una proprietà di una singola retta, senza metterla in relazione con un'altra.

Per ulteriori approfondimenti didattici relativi a questo argomento si veda Cottino et al. (2011).

2.2. Ampiezza dell'angolo

A2) Osserva i due angoli colorati in grigio e indica l'affermazione corretta.



a) L'angolo con vertice in A ha ampiezza maggiore.
b) L'angolo con vertice in B ha ampiezza maggiore.
c) Hanno entrambi la stessa ampiezza.

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
79,3	15,7	3,0	2,0

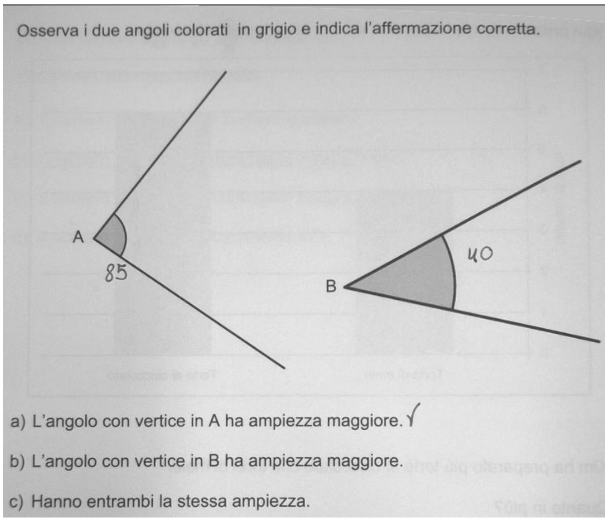
Programmi '84:
Figure geometriche
Ripresa del concetto di angolo come parte di piano.
Misure di ampiezza angolare
Dal confronto di angoli alla loro misurazione tramite un angolo arbitrario e scoperta dell'angolo grado.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

Il quesito, e quelli successivi relativi a questa suddivisione tematica, intendono verificare le conoscenze dell'allievo relative all'ampiezza dell'angolo, per questo rientrerebbero nell'ambito "Grandezze e misure" piuttosto che in "Geometria". I quesiti relativi alle ampiezze degli angoli ottengono globalmente risultati scadenti.

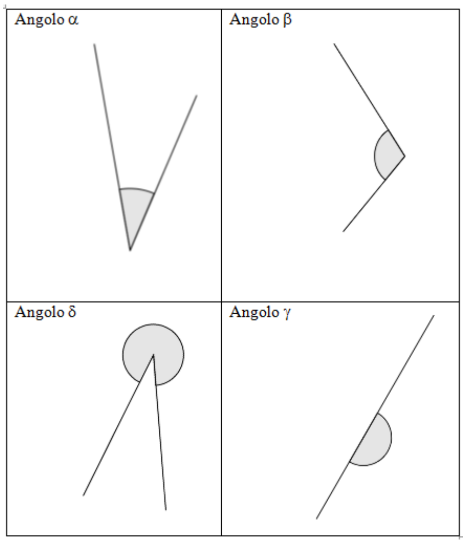
Nello specifico, si vuole verificare se gli allievi possiedono la tipica misconcezione, evidenziata dalla ricerca in didattica della matematica fin dagli anni '80 (Fischbein, Tirosh, Melamed, 1981) e ripresa in seguito (Stavy, Tirosh, 2000; Sbaragli, 2008a; Sbaragli et al., 2011; Sbaragli, Santi, 2012), derivante dall'uso dell'"archetto" per indicare un angolo. Le ricerche in didattica della matematica hanno rilevato che frequentemente l'allievo identifica quell'"archetto" con l'angolo, di conseguenza la sua lunghezza con l'ampiezza dell'angolo, confondendo così la rappresentazione fornita per indicarlo con l'oggetto in gioco (da questo punto di vista si veda Duval, 1995; 1998). Altre volte l'angolo viene confuso con la parte di piano limitata individuata dall'"archetto", rilevando così che la scelta dell'"archetto" per indicare un angolo, non risulta essere didatticamente vincente, dato che è in contrasto con l'illimitatezza dell'angolo che di solito si vuole far percepire agli allievi in base alla definizione che tipicamente si vuole far costruire: ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette con l'origine in comune (Fandiño Pinilla, Sbaragli, 2011; D'Amore, Marazzani, 2008). Queste considerazioni mettono in evidenza quanto le rappresentazioni semiotiche possano essere fuorvianti per stabilire relazioni fra le ampiezze degli angoli.

Nel quesito proposto, la rappresentazione fornita non è eccessivamente accentuata dal punto di vista delle lunghezze degli archetti rispetto alla differenza di ampiezza, ma in ogni caso potrebbe condizionare l'allievo che non ha ben appreso il concetto di angolo. I risultati mostrano che gli allievi in possesso di tale misconcezione sono il 15,7%, quindi con una percentuale abbastanza bassa.



Qui a fianco riportiamo un protocollo di risposta corretta di un allievo che non si affida solamente alla percezione visiva della rappresentazione dei due angoli, ma presumibilmente individua l'ampiezza con il goniometro (dato che riporta i valori numerici senza però l'unità di misura).

A3) Quale degli angoli indicati ha l'ampiezza maggiore?



a) Angolo α
b) Angolo β
c) Angolo δ
d) Angolo γ

Risposta corretta: c

Risultati:

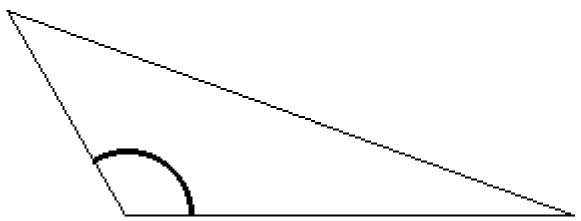
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
1,8	10,9	51,5	28,1	7,7

Programmi '84:
Figure geometriche
Ripresa del concetto di angolo come parte di piano.
Misure di ampiezza angolare
Dal confronto di angoli alla loro misurazione tramite un angolo arbitrario e scoperta dell'angolo grado.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

Il quesito registra un'alta percentuale di insuccessi, nonostante nella domanda precedente, simile a questa, quasi l'80% aveva riconosciuto l'angolo di ampiezza maggiore. Va considerato che nella domanda precedente si doveva scegliere fra tre risposte chiuse, mentre qui fra quattro, inoltre in questa domanda il fattore che probabilmente ha creato disagio è stato la presenza di un angolo concavo (risposta corretta), che solo poco più della metà degli studenti ha scelto. La spiegazione è forse da attribuire al fatto che gli allievi non sono abituati a trattare angoli concavi, anche se tramite la definizione maggiormente scelta dai docenti, sono sempre due le parti di piano che si individuano. Probabilmente dell'angolo δ, nonostante la presenza dell'"archetto" che evidenzia la parte di piano da considerare, viene considerato il suo esplementare, ossia viene considerato tra i due angoli quello di ampiezza minore. Tra gli altri tre angoli viene scelto dal maggior numero di allievi quello di maggiore ampiezza, ossia l'angolo piatto, con una percentuale del 28,1%. Per un approfondimento di questa tematica si veda Marazzani (2010).

A4)



Una di queste è la misura dell'angolo indicato sopra. Quale?

a) 60°
b) 90°
c) 120°

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
16,6	13,5	65,4	4,5

Programmi '84:
Figure geometriche
Ripresa del concetto di angolo come parte di piano.
Misure di ampiezza angolare
Dal confronto di angoli alla loro misurazione tramite un angolo arbitrario e scoperta dell'angolo grado.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce le grandezze più comuni (denaro, lunghezza, area, massa, ampiezza, temperatura, tempo e capacità) e le relative unità di misura indicate dalla Legge federale sulla metrologia.
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

L'obiettivo del quesito è di verificare se l'allievo sa associare alla rappresentazione di un particolare angolo una possibile ampiezza, effettuando così una conversione tra un registro semiotico ad un altro. Da questo punto di vista si veda Duval (2006).

Le tre possibilità di risposta sono associate a tre diverse tipologie di angolo: acuto, retto e ottuso, che gli allievi dovrebbero conoscere. In particolare, solo una di queste ampiezze è maggiore dell'angolo retto (90°), angolo maggiormente conosciuto dagli allievi. Nonostante questo, circa uno studente su tre non ha indicato la risposta corretta, distribuendo le risposte sbagliate in modo quasi equo tra gli altri due valori.

A5) La misura dell'ampiezza di un angolo è 78°. Di che tipo di angolo si tratta?

a) Angolo retto
b) Angolo acuto
c) Angolo ottuso
d) Non si può dire

Risposta corretta: b

Risultati:

a	**b**	**c**	**d**	**Mancante/ Non valida**
2,5	60,6	17,2	14,2	5,5

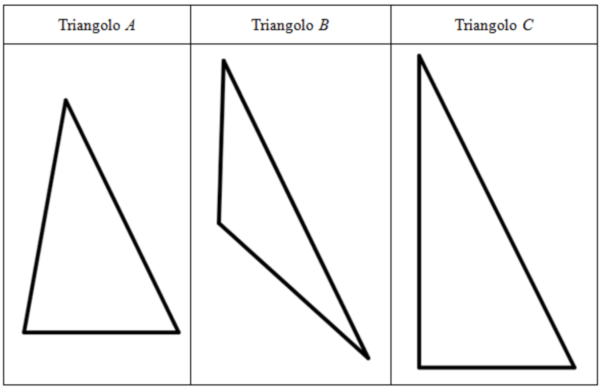
Programmi '84:
Figure geometriche
Ripresa del concetto di angolo come parte di piano.
Misure di ampiezza angolare
Dal confronto di angoli alla loro misurazione tramite un angolo arbitrario e scoperta dell'angolo grado.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce le grandezze più comuni (denaro, lunghezza, area, massa, ampiezza, temperatura, tempo e capacità) e le relative unità di misura indicate dalla Legge federale sulla metrologia.

L'obiettivo di questo quesito è valutare se gli allievi sanno associare il nome di angolo acuto ad un angolo di ampiezza maggiore di 0° e minore di 90°. I risultati mostrano che soltanto il 60,6 % degli allievi attribuisce il nome corretto ad un angolo di 78°. Tra le risposte sbagliate viene scelto principalmente l'angolo ottuso, questo può dipendere da una confusione terminologica o dal non considerare il 90° come spartiacque per individuare tale distinzione. Significativa è anche la percentuale di coloro che sostengono che non si può dire di quale tipologia sia l'angolo considerato, dimostrando di non saper individuare la tipologia di un angolo generico. Rimane relativamente bassa la percentuale degli allievi che non rispondono.

2.3. Triangoli e loro proprietà

A6) Quale dei seguenti triangoli è acutangolo?



Risposta: il triangolo ………..

Risposta corretta:
Triangolo *A*

Risultati:

A	*B*	*C*	Mancante/ Non valida
51,2	32,9	6,9	9,0

Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Questo quesito è classificato a risposta aperta univoca nonostante risulti praticamente chiuso, dato che comporta la scelta di una delle tre figure *A*, *B* o *C*.

Il quesito è in parte legato alla domanda precedente, si chiede infatti di individuare un triangolo acutangolo, ossia costituito da angoli acuti. Il triangolo acutangolo è tra i triangoli quello più frequentemente rappresentato, che si presenta in questo quesito come prima risposta e che è rappresentato in modo standard; ci si aspettava quindi fosse individuato correttamente da un'alta percentuale di allievi. Eppure, soltanto circa la metà risponde correttamente. Va però rilevato che il triangolo *C*, che voleva essere considerato come retto, non ha nessuna indicazione grafica che permette di sapere la sua ampiezza, quindi l'allievo non era tenuto ad affidarsi solamente al fattore percettivo. Per un approfondimento di questo aspetto si veda Mariotti (2005) e Duval (2005). Tra le risposte scorrette, il triangolo maggiormente scelto è quello ottusangolo, probabilmente poco riconoscibile essendo rappresentato in posizione non standard. Va inoltre segnalato che il 9% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

Sembra quindi confermarsi il risultato precedente, ossia la scarsa conoscenza delle diverse tipologie di angoli, che si ripercuote nella distinzione che solitamente viene fornita di alcuni tipi di poligoni.

A7) Quanti lati della stessa lunghezza ha un triangolo equilatero?

a) Nessuno
b) 1
c) 2
d) 3
e) Non si può dire

Risposta corretta: d

Risultati:

a	b	c	d	e	Mancante/ Non valida
5,2	4,4	19,1	47,4	8,4	15,5

Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Il quesito vuole verificare se gli allievi sanno che un triangolo equilatero è formato da tre lati della stessa lunghezza. Anche questo, come il precedente, si basa sulle diverse tipologie di triangolo, ma questa volta in base alle lunghezza dei lati, piuttosto che all'ampiezza degli angoli. Pur essendo il triangolo equilatero quello maggiormente caratteristico e forse di più facile individuazione e, pur essendo la risposta coincidente con il numero dei lati di un triangolo, solo meno della metà degli allievi risponde correttamente. Sono diversi gli allievi (19,1%) la cui risposta è due lati, confondendo il triangolo isoscele con l'equilatero.

Anche l'alta percentuale di risposte mancanti (o non valide) sommate a quella "Non si può dire" (23,9%) indica o una mancata comprensione della domanda, o la non conoscenza di questo sapere. Va tenuto però anche conto che questo è il 47-esimo quesito dei 60 somministrati.

In generale, le diverse tipologie di triangoli sembrano un argomento poco posseduto da parte degli allievi.

A8) I lati di un triangolo equilatero misurano 8 cm. Quanto misura la sua altezza?

a) Più di 8 cm.
b) Esattamente 8 cm.
c) Meno di 8 cm.
d) Non si può sapere, perché un triangolo ha 3 altezze diverse.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
13,3	33,0	13,9	14,0	25,8

Programmi '84:
Figure geometriche
Concetti di distanza e di altezza e loro applicazioni alle figure geometriche. Base e altezza di triangoli, parallelogrammi e trapezi.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Per rispondere a questo quesito occorre individuare che l'altezza di un triangolo equilatero è minore della lunghezza di un suo lato. È necessario dunque conoscere il triangolo equilatero, individuandone esattamente la forma - conoscenza che come emerge dal quesito precedente non è ben posseduta - e quello di altezza. Un concetto quest'ultimo, solo in apparenza di facile comprensione (Martini, Sbaragli, 2005).

Il quesito registra in effetti un'alta percentuale di risposte mancanti (o non valide) (25,9%) e una bassissima percentuale di risposte corrette (13,9%). Questo può derivare anche dal fatto che il quesito è il 59-esimo dei 60 somministrati.

Uno studente su tre ha risposto che l'altezza misura quanto un lato del triangolo equilatero, dimostrando una profonda lacuna nel concetto di altezza di un poligono o di triangolo equilatero. Risulta interessante anche notare che il 14% degli allievi risponde: "Non si può sapere, perché un triangolo ha 3 altezze diverse", non considerando che in un triangolo equilatero le tre altezze risultano congruenti.

A9) Indica l'affermazione vera.

a) Tutti i poligoni sono quadrilateri.
b) Tutti i triangoli sono poligoni.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
32,5	51,0	16,5

Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
- loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo, ecc.);
- loro definizione;
- perimetro.

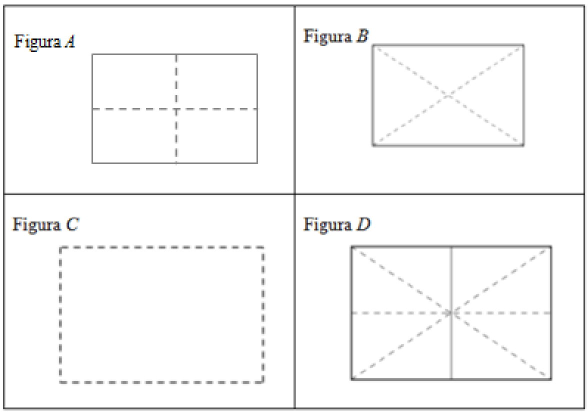
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Malgrado questo quesito fosse a risposta chiusa con solamente due scelte, solo la metà degli allievi risponde correttamente.

La difficoltà è legata all'espressione: "tutti" tipica della logica dei predicati che potrebbe rendere le frasi di difficile interpretazione e dei termini geometrici implicati: poligoni, quadrilateri e triangoli, che dovrebbero invece essere conosciuti dagli allievi. Va segnalato che il 32,5% sostiene che: "Tutti i poligoni sono quadrilateri" o per incapacità di comprendere la frase o perché non sono capaci di ipotizzare il caso di un poligono che non sia un quadrilatero, come ad esempio il triangolo, sicuramente da loro conosciuto. Forse vi è anche poca abitudine a gestire frasi di questo tipo e a rintracciare controesempi ad affermazioni. Il quesito registra anche un'alta percentuale di risposte mancanti (o non valide), il 16,5%; va tenuto conto che questo rappresenta il 50-esimo quesito somministrato sui 60.

2.4. Quadrilateri e loro proprietà

A10)



In quale dei rettangoli sono tratteggiate solamente le sue diagonali?

a) Nella figura *A*
b) Nella figura *B*
c) Nella figura *C*
d) Nella figura *D*

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
10,9	76,8	5,3	3,9	3,1

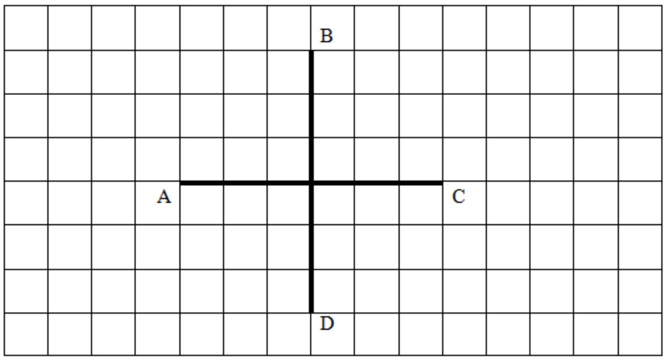
Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Questo quesito, e i successivi tre, sono tutti incentrati sulle diagonali di un quadrilatero, a discapito di altri elementi e proprietà relativi a questi poligoni. La percentuale di risposte corrette evidenzia una buona conoscenza dell'argomento, che solitamente viene presentato fin dalla terza elementare.

In questo quesito si chiede di individuare le diagonali di un rettangolo. La percentuale di riuscita è alta (76,8%). Un 10,9% degli studenti confonde le diagonali con le mediane.

A11)



I segmenti AC e BD sono diagonali di un quadrilatero. Quale?

a) Un quadrilatero con 4 lati congruenti e 4 angoli retti.
b) Un quadrilatero con 4 lati di diversa lunghezza (scaleno).
c) Un quadrilatero con una sola coppia di lati paralleli.

Risposta corretta: a

Risultati:

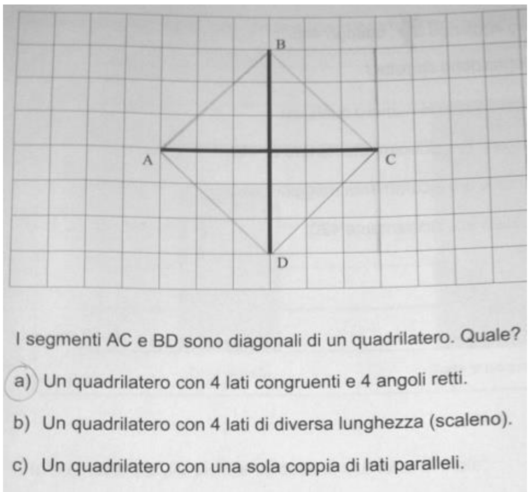
a	b	c	Mancante/ Non valida
77,4	4,3	9,5	8,8

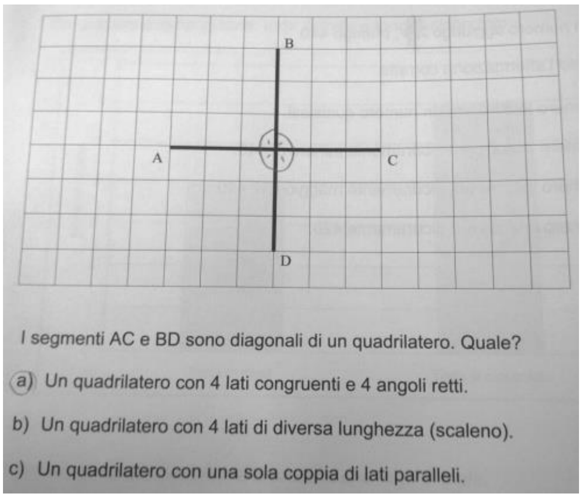
Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

In questo quesito vengono disposte le due diagonali di un quadrato in posizione non standard rispetto alla posizione in cui solitamente viene disegnata tale figura, ossia con i lati orizzontali e verticali rispetto al lettore (Gallo, Amoretti, Testa, 1989; D'Amore et al., 2008; Martini, Sbaragli, 2005). La percentuale di riuscita è alta (77,4%), ma va considerato che tra le risposte scorrette non vi è nessun distrattore significativo, come ad esempio: "Un quadrilatero con 4 lati congruenti e 4 angoli non retti" che avrebbe potuto catturare l'attenzione degli studenti che possiedono la "misconcezione da posizione vincolante" di ritenere le diagonali orizzontali e verticali tipiche di un rombo generico. E neppure il distrattore: "È un parallelogrammo generico", che avrebbe catturato maggiormente l'attenzione delle due risposte scorrette proposte. In effetti, per esclusione era plausibile solo la prima risposta.

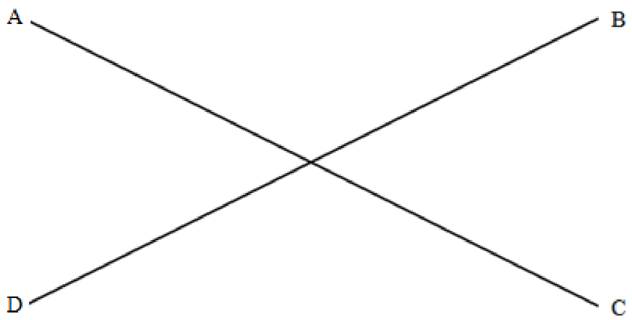
Di seguito riportiamo due protocolli di allievi che hanno fornito la risposta corretta, ma seguendo due ragionamenti differenti.





Il primo allievo disegna sulla griglia il quadrilatero richiesto, mentre il secondo mette in evidenza la perpendicolarità delle diagonali; entrambi forniscono la riposta corretta. Nel secondo caso emerge in particolare l'importanza di effettuare un'intervista agli allievi per verificare le motivazioni, e di conseguenza la veridicità, della risposta. In effetti, l'allievo potrebbe aver capito che si tratta di un quadrato per le proprietà delle sue diagonali (congruenti, perpendicolari tra loro e che si tagliano a metà), ma potrebbe aver associato la risposta scelta: "Un quadrilatero con 4 lati congruenti e 4 angoli retti" alle caratteristiche delle lunghezze delle diagonali e agli angoli retti individuati dalle diagonali stesse, invece che alle caratteristiche del quadrilatero individuato.

A12)



I segmenti AC e BD sono diagonali di un quadrilatero. Quale?

a) Quadrato
b) Rombo
c) Rettangolo

Risposta corretta: c

Risultati:

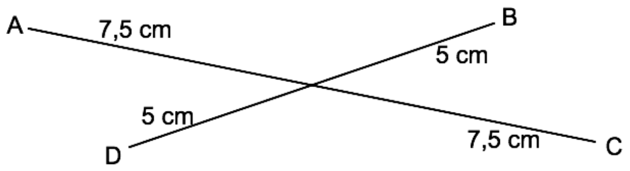
a	b	c	Mancante/ Non valida
10,9	9,5	76,1	3,5

Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
- loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
- loro definizione;
- perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Questo quesito è simile al precedente, ossia chiede di individuare il tipo di quadrilatero in base alle proprietà delle sue diagonali. Le proprietà, però, vengono desunte liberamente dal disegno, ossia non vengono date indicazioni di tipo metrico, che sarebbero invece indispensabili per non rendere il quesito liberamente interpretabile. Si chiede quindi agli allievi di individuare il tipo di quadrilatero (rettangolo), tenendo conto che le diagonali disegnate devono essere considerate congruenti e che si tagliano a metà, quindi desumendo queste informazioni solo da fattori percettivi non certi. Malgrado la formulazione impropria, il quesito viene risolto dal 76,1% degli allievi. Le due risposte scorrette: quadrato e rombo, vengono scelte più o meno con la stessa percentuale da chi sbaglia la risoluzione.

A13)



I segmenti AC e BD sono diagonali di un quadrilatero. Quale?
Risposta: ……………………………………………………

Risposta corretta:
Parallelogramma oppure romboide

Risultati:

Risposta Corretta	Risposte errate							Mancante/ Non valida
Romboide/ Parallelo-gramma	AC o BD o loro lunghezza	Rettan-golo	Rombo	Trapezio	Quadri-latero	Trian-golo	Altro	
28,0	12,4	11,0	7,5	2,6	2,1	1,2	3,1	32,1

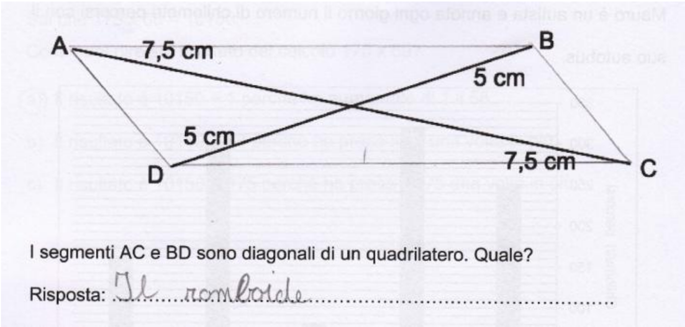
Programmi ’84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
- loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
- loro definizione;
- perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L’allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Questo quesito risulta più interessante dei precedenti, essendo aperto e coinvolgendo aspetti metrici importanti per rendere univoca la risposta.

Tra chi risolve correttamente il quesito, il 18% risponde romboide mentre il 10% parallelogrammo. Sono quindi solo il 28% gli allievi che rispondono correttamente.

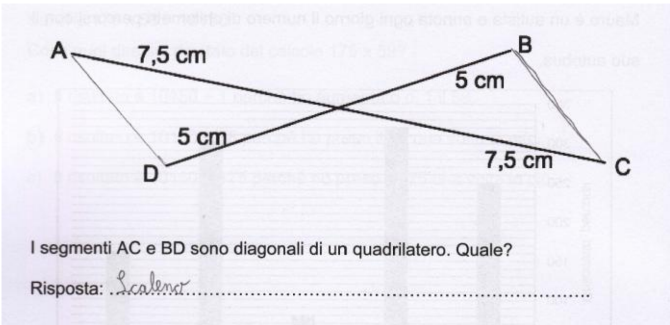
Di seguito è riportato un protocollo di soluzione corretta derivante dal disegno realizzato nel testo.



Si nota una grande differenza di risultati rispetto al quesito precedente, sicuramente derivante dalla diversa tipologia di domande, chiuse o aperte, e forse dal tipo di figure coinvolte.

Tra chi sbaglia, si riscontra l'11% di risposte "Rettangolo" e il 7,5% di "Rombo".

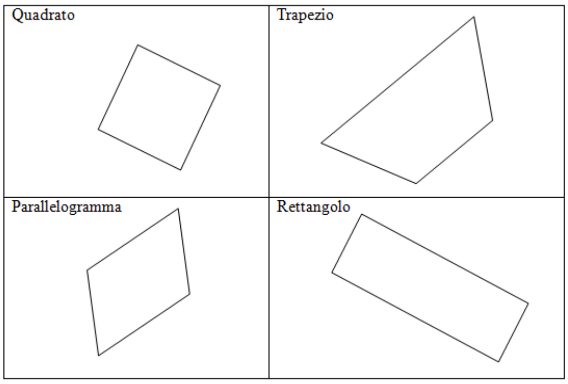
Nella tipologia "Altro", l'1,9% fornisce risposte fantasiose del tipo: "Parallele incrociate", "Sì, sono diagonali", "Acuto", "Tutti", ... In quest'ultima tipologia rientra un allievo che rappresenta una figura intrecciata che chiama: "Scaleno" (vedi protocollo seguente).



Inoltre lo 0,7% della tipologia "Altro" fornisce le risposte: "Deltoide" o "Parallelepipedo" e 0,5% "Quadrato".

Sono diversi gli allievi (12,4%) che non capiscono il senso della domanda e rispondono con "dati" del testo: AC o BD o loro lunghezze desunte dal disegno. Assai rilevante è la percentuale di risposte mancanti o non valide, ben il 32,1%. Da questo punto di vista va tenuto conto che questo quesito rappresenta il 56-esimo proposto sui 60 somministrati.

A14)



Uno dei quadrilateri rappresentati ha ***solamente una coppia*** di lati paralleli. Quale?

a) Quadrato
b) Trapezio
c) Parallelogramma
d) Rettangolo

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
10,0	54,6	9,6	19,9	5,9

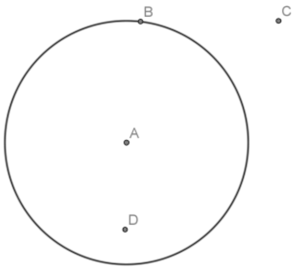
Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo,ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i poligoni in base a lati e angoli, diagonali e assi di simmetria anche in posizioni non convenzionali.

Questo quesito sui quadrilateri risulta un po' più vario rispetto ai precedenti, che vertevano tutti sulle diagonali. Il quesito si basa sul riconoscimento dell'unica figura rappresentata avente una sola coppia di lati paralleli, il trapezio. Come formulazione vengono forniti contemporaneamente due registri semiotici diversi: linguistico (nome della figura) e figurale (disegno di un rappresentante della tipologia di figura); in questo modo il disegno può essere interpretato concettualmente con certezza tramite il nome della figura. Sulla classificazione dei quadrilateri si veda l'articolo di Bagni e D'Amore (1992). Questo rappresenta un quesito solo all'apparenza semplice, dato che i risultati mostrano una bassa percentuale di risposte corrette, solo il 54,6%. Va notato che tutte le figure sono posizionate in modo non standard e di conseguenza anche le coppie di lati paralleli. Tra coloro che sbagliano, la maggioranza risponde: "Rettangolo", seguita da "Quadrato" e "Parallelogramma" che ottengono più o meno la stessa percentuale di risposte.

2.5. Cerchio e suoi elementi

A15) Nella figura seguente sono rappresentati un cerchio e quattro punti.



Quale punto è il centro del cerchio?

a) Il punto A
b) Il punto B
c) Il punto C
d) Il punto D

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
98,0	0,5	0,1	0,4	1,0

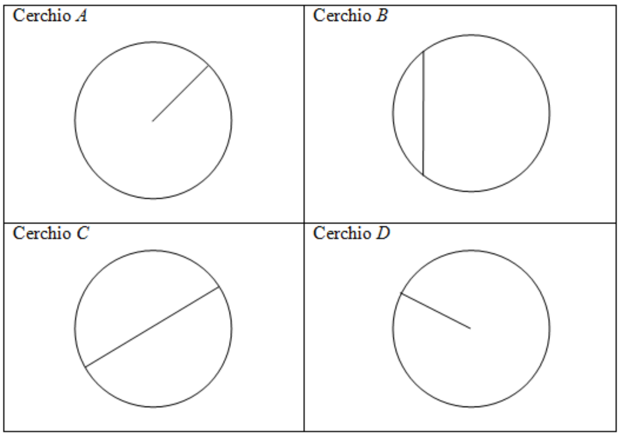
Programmi '84:
Figure geometriche
Conoscenza degli elementi del cerchio (centro, raggio, diametro, circonferenza).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).

L'argomento del cerchio e dei suoi elementi, pur rientrando nel programma di IV elementare secondo i Programmi del 1984, in vigore quando sono state somministrate le prove, solitamente viene affrontato in V elementare. Questo rappresenta quindi un argomento che mette in evidenza la differenza che c'è tra il curricolo "ufficiale" (o curriculum intended) e il curricolo "sviluppato" realmente dai docenti (o curriculum implemented). Malgrado questa considerazione, le domande poste risultano molto intuitive e hanno perciò fornito un'alta percentuale di risposte corrette.

In effetti, che il centro del cerchio potesse essere il punto A, risulta talmente intuitivo che il 98% degli allievi risponde correttamente. Va tenuto in considerazione che anche in questo caso la domanda: "Quale punto è il centro del cerchio?" poteva essere sostituita dalla formulazione: "Quale punto potrebbe essere il centro del cerchio?" dato che anche in questo caso la formulazione è legata a fattori percettivi piuttosto che concettuali.

A16) In uno dei seguenti cerchi è indicato il diametro:



In quale?

a) Nel cerchio *A*
b) Nel cerchio *B*
c) Nel cerchio *C*
d) Nel cerchio *D*

Risposta corretta: c

Risultati:

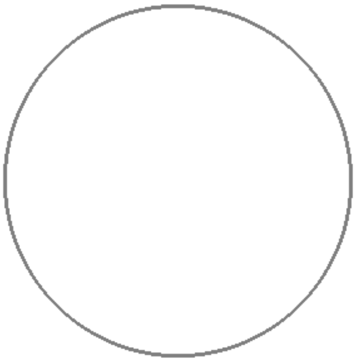
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
6,3	5,7	74,1	3,4	10,5

Programmi '84:
Figure geometriche
Conoscenza degli elementi del cerchio (centro, raggio, diametro, circonferenza).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).

Il quesito richiede di individuare tra gli elementi del cerchio rappresentati un diametro. Anche in questo caso la domanda verte su fattori percettivi, piuttosto che concettuali, dando così l'immagine all'allievo di poter desumere informazioni in geometria dalla semplice lettura "ad occhio" del disegno, piuttosto che da informazioni certe. In effetti, non si ha la certezza che i segmenti rappresentati siano due raggi, un diametro e una corda generica. In questo quesito, la percentuale di risposte corrette risulta piuttosto alta, ben il 74,1%, dimostrando una buona capacità degli allievi a riconoscere gli elementi caratteristici del cerchio. Le percentuale delle risposte scorrette sono abbastanza ben distribuite, con una prevalenza nelle domande mancanti o non valide (10,5%). Per un approfondimento su questa tematica, si veda (Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006).

A17)
Quanti assi di simmetria possiede un cerchio?



a) 1 asse di simmetria.
b) 4 assi di simmetria.
c) Infiniti assi di simmetria.
d) Non si può dire.

Risposta corretta: c

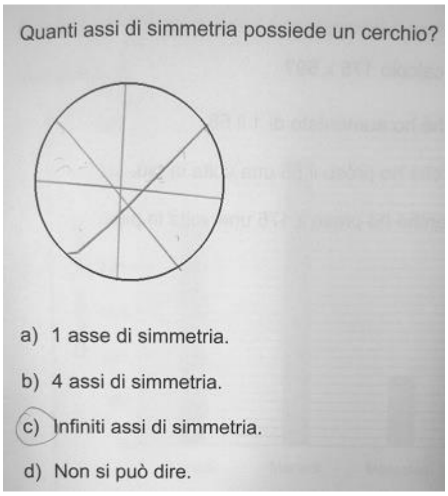
Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
19,0	17,8	28,2	13,3	21,7

Programmi ’84:
Figure geometriche
Conoscenza degli elementi del cerchio (centro, raggio, diametro, circonferenza).

Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L’allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).

Il quesito richiede di individuare il numero di assi simmetria del cerchio, ossia infiniti in senso attuale. Il concetto di infinito rappresenta un argomento epistemologicamente molto complesso e per questo difficile da essere appreso e dominato da parte degli allievi (Arrigo, D’Amore, Sbaragli, 2010). In effetti, solo il 28,2% risponde correttamente al quesito. Di seguito riportiamo un protocollo come esempio, dove l’allievo comincia a tracciare sulla figura alcuni assi di simmetria e intuisce che il loro numero è ben superiore a 4, come testimonia la scelta della risposta.

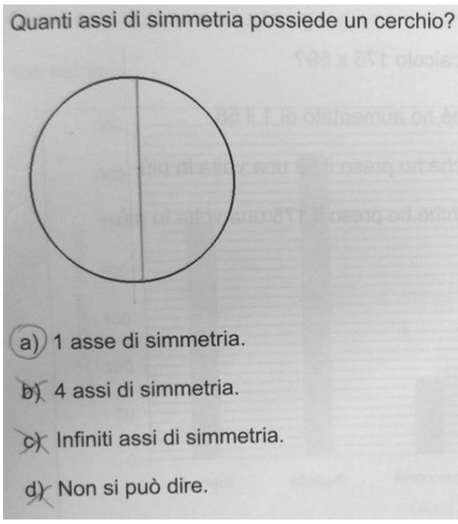


Quanti assi di simmetria possiede un cerchio?

a) 1 asse di simmetria.
b) 4 assi di simmetria.
c) Infiniti assi di simmetria.
d) Non si può dire.

Sono diversi gli allievi che rispondo 1 o 4 assi (rispettivamente il 19% e il 17,8%).

Di seguito riportiamo il protocollo di un allievo che andando per esclusione ha scelto la risposta a), disegnando sulla figura l'asse immaginato, in posizione verticale rispetto al lettore, come tra l'altro è più usuale vederlo rappresentato.



Va però segnalato che manca il distrattore 2 tra le risposte scorrette; distrattore che avrebbe potuto attirare l'attenzione degli allievi che non conoscevano l'argomento in gioco. Durante le sperimentazioni è frequante riscontrare come risposta a questa domanda due assi di simmetria, rappresentati perpendicolari l'uno rispetto all'altro. Tra coloro che non rispondono o forniscono una risposta non valida e coloro che affermano: "Non si può dire" si raggiunge il 35%. Va considerato che questo quesito rappresenta il 53-esimo dei 60 somministrati.

2.6. Figure dello spazio

A18) Quante facce ha un cubo?

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12
f) 16

Risposta corretta: b

Risultati:

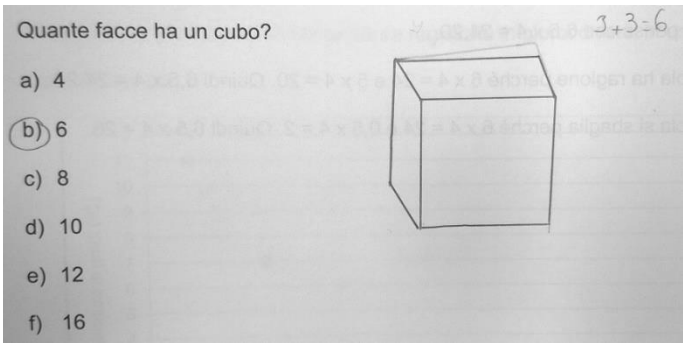
a	b	c	d	e	f	Mancante/ Non valida
16,1	79,4	1,7	0,2	0,5	0,2	1,9

Programmi '84:
Non c'è esplicito riferimento alla trattazione della geometria solida in quarta elementare. In quinta troviamo le seguenti indicazioni:
Figure geometriche
Studio di semplici solidi e ricerca di forme geometriche solide in oggetti.
Costruzioni geometriche
Eventuale costruzione del cubo, del parallelepipedo rettangolo, prismi retti, cilindro, con materiale e mediante loro sviluppo.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e descrive i solidi più comuni e i loro elementi caratteristici anche in posizioni non convenzionali.

Il quesito richiede di individuare il numero delle facce di un cubo. Le figure dello spazio, pur rientrando nel programma del 1984, non vengono solitamente proposte nella scuola elementare, perdendo così diverse importanti occasioni didattiche di apprendimento vicine al mondo degli allievi (Arrigo, Sbaragli, 2004; Sbaragli, Mammarella, 2010). Come per il cerchio, anche per le figure dello spazio, emerge una differenza tra il *curriculum intended* e il *curriculum implemented*. Malgrado questa considerazione gli allievi conoscono bene le facce del cubo, ben il 79,4%. Il buon risultato non stupisce, dato che nella quotidianità gli allievi maneggiano solidi, in particolari cubi, come ad esempio dadi da gioco (Cottino, Sbaragli, 2005).

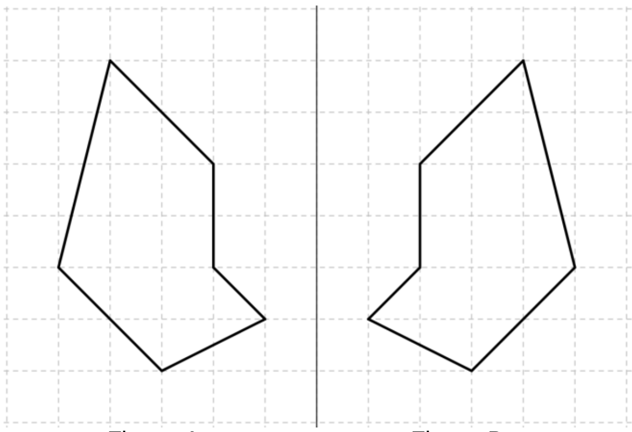
Di seguito riportiamo il protocollo di un allievo che ha risposto correttamente, rappresentando anche graficamente il solido. È interessante la strategia di conteggio che ha attuato 3 + 3 = 6, probabilmente riferendosi alle facce disegnate, ossia quelle che si vedono (3) e immaginando quelle nascoste (altre 3).



Tra coloro che sbagliano la risposta ben il 16,1% risponde 4, forse attirati dal numero di lati di un quadrato piuttosto che dal numero di facce di un cubo.

2.7. Simmetria assiale

A19) Le figure *A* e *B* sono simmetriche:



Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) La figura *B* ha il perimetro maggiore.
b) La figura *B* ha l'area maggiore.
c) La figura *B* e la figura *A* hanno lo stesso perimetro ma l'area diversa.
d) La figura *A* e la figura *B* hanno sia lo stesso perimetro sia la stessa area.

Risposta corretta: d

Risultati:

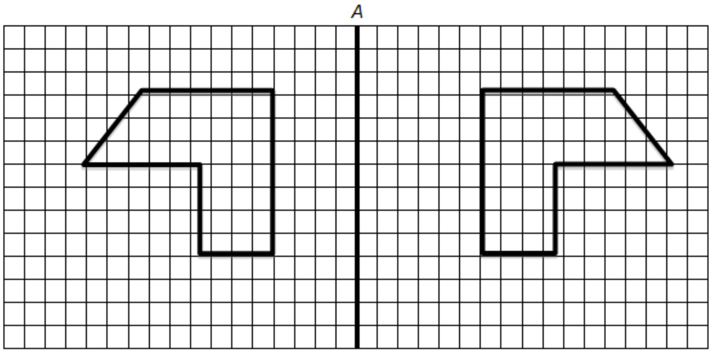
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
1,6	1,9	10,6	80,9	5,0

Programmi '84:
Trasformazioni geometriche
Attività con le simmetrie assiali e centrali e con le traslazioni per consolidare o applicare i concetti di:
• parallelismo e perpendicolarità;
• distanza;
• angolo;
• poligono.
Costruzioni geometriche
Disegni su foglio quadrettato e non quadrettato:
• simmetrie assiali, centrali e traslazioni.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce figure traslate, simmetriche, ruotate in situazioni significative.
L'allievo riconosce e ricava informazioni da schizzi e disegni geometrici.

Il quesito ha l'obiettivo di rilevare se gli allievi sanno che due figure simmetriche hanno lo stesso perimetro e la stessa area. Al quesito si può rispondere correttamente o sapendo concettualmente che due figure simmetriche sono congruenti e quindi possiedono lo stesso perimetro e la stessa area, oppure verificandolo direttamente dalla figura. Come era prevedibile la percentuale di riuscita è alta, ben l'80,9%. La maggioranza di coloro che sbagliano (10,6%) sostengono che: "La figura *B* e la figura *A* hanno lo stesso perimetro ma l'area diversa". Sul tema delle trasformazioni geometriche si veda Foresti, Sangiorgi (2011).

A20) Le due figure sono simmetriche rispetto alla retta *A*?



a) Sì
b) No

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
39,1	55,7	5,2

Programmi ’84:
Trasformazioni geometriche
Attività con le simmetrie assiali e centrali e con le traslazioni per consolidare o applicare i concetti di:
- parallelismo e perpendicolarità;
- distanza;
- angolo;
- poligono.

Costruzioni geometriche
Disegni su foglio quadrettato e non quadrettato:
- simmetrie assiali, centrali e traslazioni.

Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L’allievo riconosce figure traslate, simmetriche, ruotate in situazioni significative.
L’allievo riconosce e ricava informazioni da schizzi e disegni geometrici.

Il quesito richiede di stabilire se due figure sono tra loro simmetriche. Pur essendo un quesito a risposta chiusa, con un sì o un no come uniche scelte, quindi con un 50% di probabilità di essere individuata anche casualmente, solo il 55,7% degli allievi risponde correttamente. Circa il 40% degli allievi ha guardato semplicemente la congruenza delle figure senza dare importanza all’equidistanza dalla retta *A*. Risulta una tendenza diffusa, forse derivante anche da una pratica didattica poco attenta a questo aspetto, quella di dare importanza - per quanto concerne una figura con assi di simmetria o due figure tra loro simmetriche - alla congruenza delle parti o delle figure e non all’equidistanza dall’asse; per questa ragione diversi studenti, anche adulti, ritengono erroneamente che le diagonali di un parallelogrammo generico sono anche assi di simmetria della figura.

3. Geometria – Eseguire e applicare

I quesiti relativi all'ambito "Geometria", aspetto di competenza: "Eseguire e applicare", sono stati suddivisi secondo le seguenti tematiche: confronto di percorsi (2 quesiti), ampiezza dell'angolo (2 quesiti), perimetro (3 quesiti), confronto di perimetri (2 quesiti), equiscomposizione (1 quesito), confronto di aree (4 quesiti), cerchio e suoi elementi (1 quesito), simmetria assiale (5 quesiti). Le tipologie delle domande somministrate sono: 11 a risposta chiusa e 9 a risposta aperta univoca. Tra i quesiti a risposta multipla, 3 prevedono 2 opzioni di risposta, 7 ne prevedono 3 e 1 quesito ne prevede 8. Anche in questo ambito notiamo un'organizzazione disomogenea delle tipologie di domanda.

Nelle tabelle 1-2 sono riportate le risposte ai 20 quesiti, con l'indicazione delle percentuali ottenute, suddivise per tipologia: risposta chiusa, aperta univoca o aperta articolata. Sono state evidenziate le risposte corrette. Il testo di ciascun quesito con le relative percentuali di riuscita, l'individuazione della tematica relativa ai quesiti nei Programmi del 1984 e nel nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e il relativo commento didattico sono presentate di seguito. Le percentuali riportate nelle seguenti tabelle sono state calcolate in base ai risultati dell'intera popolazione di allievi (2935), alla quale sono stati somministrati i fascicoli. Per l'analisi dei protocolli e delle risposte date ai soli quesiti a risposta aperta univoca o articolata è stato selezionato un campione significativo di 414 studenti. Le percentuali riportate nelle tabelle a fianco di ciascuno dei quesiti sono state calcolate sul suddetto campione.

• Quesiti a risposta chiusa

Domanda	Risposte (%)								Mancante/ Non valida (%)
	a	b	c	d	e	f	g	h	
B1	63,9	16,5	17,5						2,1
B2	24,9	33,0	39,1						3,0
B8	31,7	61,6							6,7
B11	11,0	7,3	80,0						1,7
B12	82,1	7,2	7,5						3,2
B13	84,7	12,5							2,8
B14	83,1	11,3	2,5						3,1
B15	11,6	18,0	65,4						5,0
B16	26,2	72,4							1,4
B17	70,1	12,3	1,3	1,8	1,8	0,9	1,7	3,7	6,4
B18	3,8	73,2	19,0						4,0

• Quesiti a risposta aperta univoca

Domanda	Risposta corretta (%)	Risposta errata (%)	Mancante/ Non valida (%)
B3	40,6	49,2	10,2
B4	26,4	58,4	15,2
B5	42,9	28,1	29,0
B6	45,7	29,6	24,7
B7	27,6	56,6	15,8
B9	17,1	57,8	25,1
B10	63,1	22,1	14,8
B19	68,5	10,1	21,4
B20	21,4	42,8	35,8

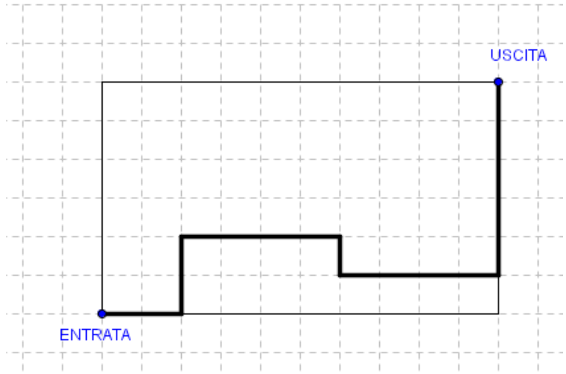
Tabella 1-2: Risposte alle diverse tipologie di quesiti

3.1. Confronto di lunghezze di percorsi

B1) Nei due disegni il rettangolo rappresenta la pianta di un parco. Roberto e Giada hanno attraversato il parco percorrendo due strade diverse: quelle segnate in grassetto.
Entrambi sono entrati dal punto indicato con ENTRATA e sono usciti dal punto indicato con USCITA.

Percorso di Roberto

Percorso di Giada



Chi dei due ha fatto il percorso più corto?

a) Roberto ha fatto il percorso più corto.
b) Giada ha fatto il percorso più corto.
c) I due percorsi sono lunghi uguali.

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
63,9	16,5	17,5	2,1

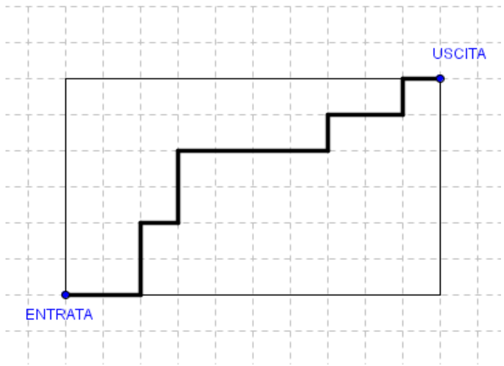
Programmi '84:
Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

B2) Nei due disegni il rettangolo rappresenta la pianta di un parco. Fabio e Matteo hanno attraversato il parco percorrendo due strade diverse: quelle segnate in grassetto.
Entrambi sono entrati dal punto indicato con ENTRATA e sono usciti dal punto indicato con USCITA.

Percorso di Fabio

Percorso di Matteo



Chi dei due ha fatto il percorso più corto?

a) Fabio ha fatto il percorso più corto.
b) Matteo ha fatto il percorso più corto.
c) I due percorsi sono lunghi uguali.

Risposta corretta: c

Risultati:

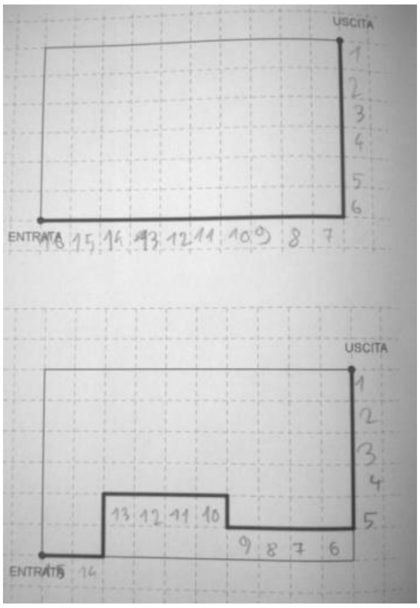
a	b	c	Mancante/ Non valida
24,9	33,0	39,1	3,0

Programmi '84:
Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

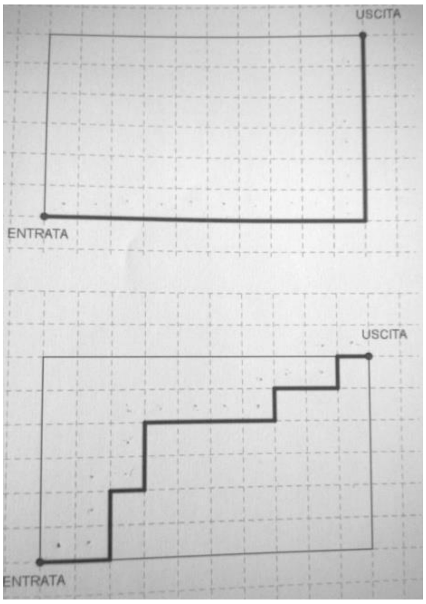
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

I due quesiti relativi al tema "confronti di lunghezze di percorsi" rientrano nell'ambito "Grandezze e misure", dato che coinvolgono confronti di lunghezze su piani quadrettati, piuttosto che nell'ambito di competenza "Geometria". Al quesito B1) risponde correttamente solo il 63,9% degli allievi, una percentuale piuttosto bassa per un confronto di lunghezze di questo tipo, che è già previsto fin dal primo ciclo della scuola elementare tramite il tema dei percorsi sulle griglie. Le risposte scorrette si dividono praticamente a metà tra le altre due risposte chiuse. Questi quesiti richiedono una prestazione a livello cognitivo di base: contare i segmenti dall'entrata all'uscita per entrambi i percorsi per poi confrontare i numeri. Il processo risolutivo potrebbe essere sostenuto tracciando segni sui segmenti che individuano il percorso e attivando strategie di conteggio, ma sulla quadrettatura si possono verificare misconcezioni relative al conteggio dell'intero quadretto invece del lato di un quadretto (Martini, Sbaragli, 2005). Nel linguaggio naturale, in particolare nel lessico quotidiano adottato in classe, in effetti spesso non si fa distinzione tra lato di quadretto/segmento/tratto e quadretto e questo porta poi ad errori nell'individuazione del perimetro di poligoni.

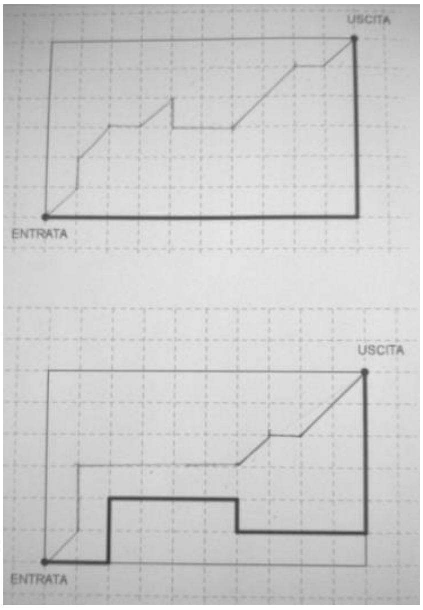
Il protocollo seguente testimonia la strategia di conteggio adottata dall'allievo, che probabilmente conta l'intero quadretto, invece del lato, numerandoli. La sua strategia prevede di non contare il quadretto con un vertice in comune con il percorso. Nel conteggio del secondo percorso dimentica un quadretto. La risposta di questo studente è stata la b).



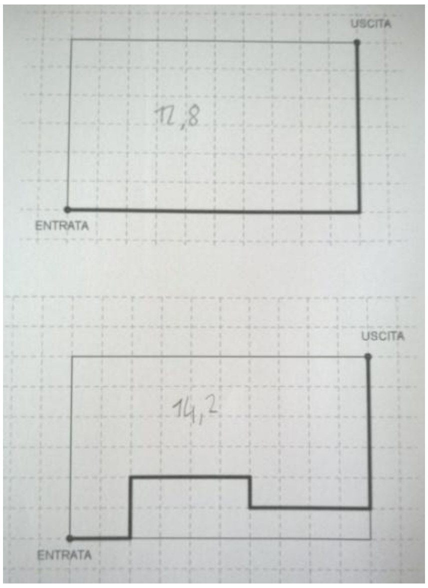
Questa misconcezione si ripresenta anche nel quesito B2), come emerge dal protocollo seguente, dove un altro studente conta i quadretti invece dei segmenti, lasciando traccia con un puntino.

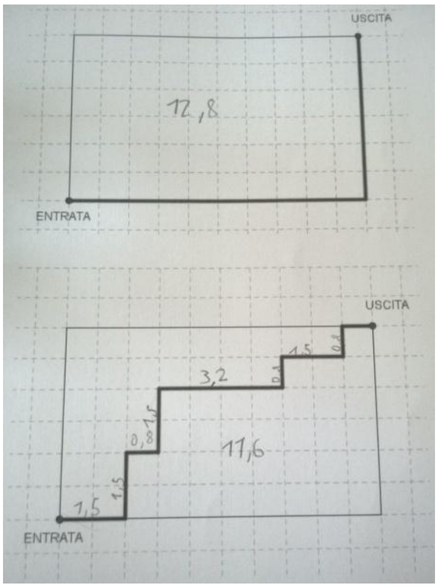


Tra i protocolli analizzati troviamo anche disegni fantasiosi che conducono ad una risposta errata, forse derivante da una mancata comprensione della consegna, come nel caso del protocollo seguente dove l'allievo risponde c). Il fatto che egli dichiari che i due percorsi sono lunghi uguali, pur non essendo tali, forse dipende dal fatto che per valutarne la lunghezza conti il numero di tratti del percorso, che in entrambi i casi sono 12, senza pensare che la diagonale del quadretto è più lunga del suo lato.



È interessante anche osservare che tra coloro che rispondono correttamente, non sempre c'è alla base un conteggio dei tratti, bensì una misura con il righello, come testimonia il protocollo seguente, dove i numeri riportati indicano approssimativamente la lunghezza del percorso ottenuta con il righello (rispettivamente 12,8 cm e 14,4 cm). Lo stesso alunno però risponde al quesito B2) in modo errato [opzione b)], vedi protocollo a destra, dove emerge la dimenticanza da parte dello studente della misura di un tratto e l'imprecisione nell'effettuare le misure, che comportano errori nella risposta.





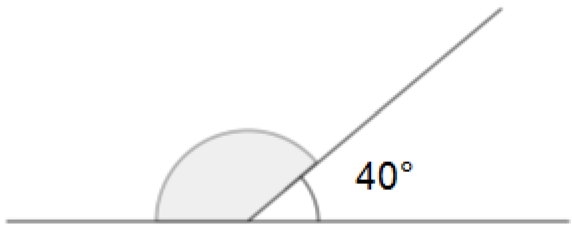
Altre risposte errate sembrano essere legate a fattori percettivi, invece che basate su un controllo quantitativo della situazione.

Attivare strategie di conteggio adeguate e confronti di misura mediante il supporto di segni o di strumenti, e non lasciarsi trasportare dalle suggestioni percettive, dovrebbero essere due componenti da educare nell'ambito "Grandezze e misure", preliminari alla comprensione dei concetti di perimetro e di area. Da questo punto di vista si veda Cottino et al. (2011).

Il quesito B2), pur richiedendo a livello cognitivo la stessa prestazione del quesito precedente, risulta più complesso se viene risolto a livello percettivo, perché coinvolge due percorsi della stessa lunghezza che in apparenza non sembrano tali. Le risposte corrette sono il 39,1%, mentre tra le risposte errate si ha una maggiore percentuale nella risposta b), percettivamente considerato il percorso più lungo (33% delle risposte sbagliate), piuttosto che la a), con il 24,9% di risposte errate.

3.2. Ampiezza dell'angolo

B3) Osserva attentamente la seguente figura.



Quanto misura l'angolo indicato in grigio?

Risposta: L'angolo misura …………………………………………………

Possibile risposta corretta:
140°

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate								Mancante/ Non valida
140°	**140 (con udm errata)**	**120°**	**140 (senza udm)**	**320°**	**60°**	**180°**	**90°**	**Altro**	
38,6	8,7	7,5	4,8	4,6	4,3	3,9	3,6	15,1	8,9

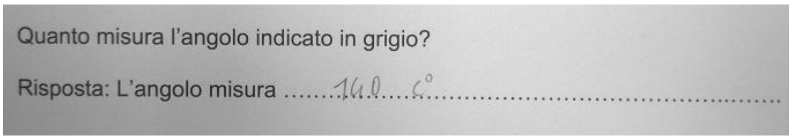
Programmi '84:
Problemi
(…) problemi di misura di capacità, peso, valore, ampiezza angolare, tempo, area (casi semplici).

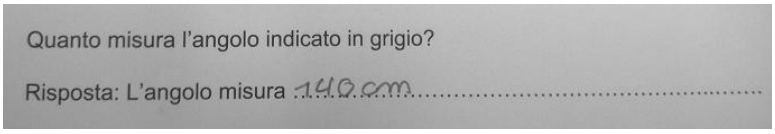
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

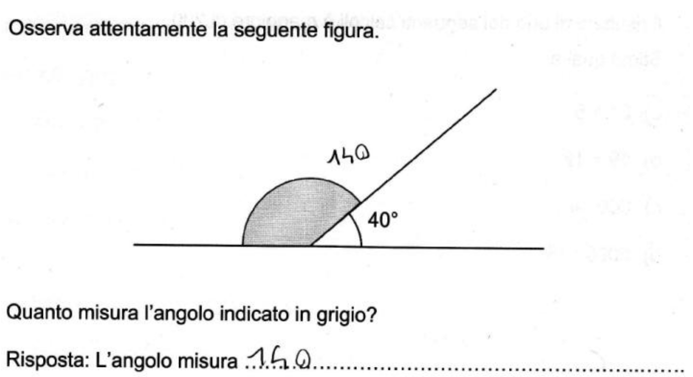
In questo quesito e nel successivo viene chiesto di individuare ampiezze di angoli rappresentati in modo figurale, si tratta quindi di effettuare una conversione da un registro semiotico ad un altro (Duval, 2006). Per individuare l'angolo del quale si voleva l'ampiezza, invece di disegnare l'archetto e la parte di piano colorata di grigio, si poteva mettere un punto interrogativo o un qualsiasi altro simbolo. Queste richieste dovrebbero rientrare nell'ambito di competenza "Grandezze e misure" piuttosto che nell'ambito "Geometria". Il tema dell'angolo viene trattato fin dalla terza elementare, con il relativo concetto di ampiezza e ripreso negli anni successivi (D'Amore, Marazzani, 2008).

A questo quesito risponde correttamente solo il 38,6% degli allievi, pur chiedendo semplicemente di individuare l'angolo supplementare di un angolo assegnato (somma delle ampiezze degli angoli 180°).

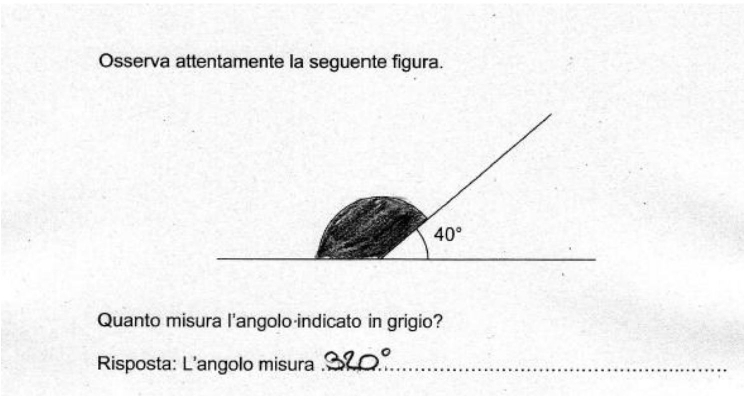
È significativo il fatto che il 13,5% degli alunni abbia indicato la misura corretta, ma con l'unità di misura sbagliata (8,7%) oppure omessa (4,8%). Lo studente in questo caso ha svolto correttamente l'operazione richiesta dal quesito, senza però essere consapevole del significato del numero che ne è risultato e che necessita di unità di misura adeguata.





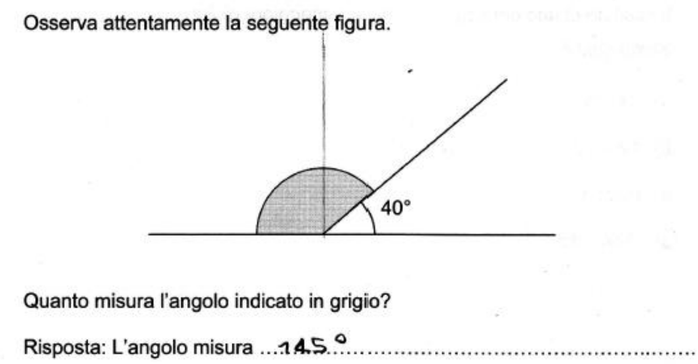


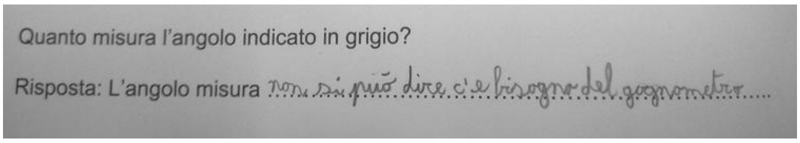
Il 7,5% risponde 120°, ampiezza che gli insegnanti spesso scelgono quando propongono un angolo ottuso; il 4,6% degli allievi risponde con un angolo esplementare a quello assegnato (complemento rispetto all'angolo giro) piuttosto che al complemento rispetto all'angolo piatto. Si riporta di seguito un esempio.



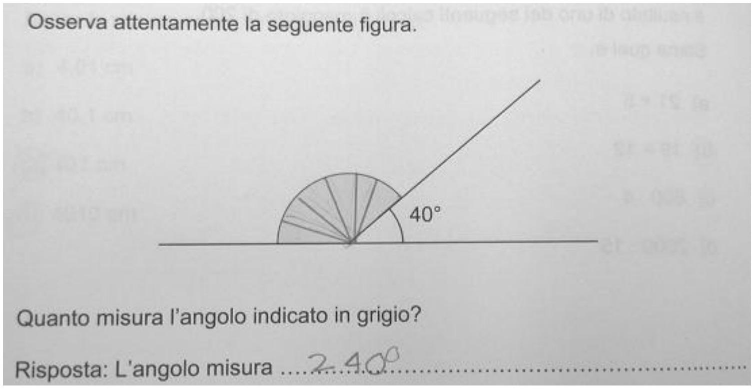
Il 4,3% risponde con un'ampiezza dell'angolo che solitamente viene proposta dagli insegnanti quando si parla di un angolo acuto, ossia 60°; il 3,9% risponde direttamente con l'ampiezza dell'angolo piatto; il 3,6% con l'ampiezza di un angolo retto; mentre il 15,1% degli allievi rientra nella categoria "Altro". In quest'ultima categoria l'1,7% risponde 40°, 80°, 50°, 160°, 3 cm; circa lo 0,5% risponde "Non l'abbiamo fatto" o "C'è bisogno del gognometro"; inoltre vi sono tantissime risposte con numeri di vario tipo con una percentuale di 0,2-0,3% per ogni tipologia.

Si riportano di seguito alcuni protocolli a mo' di esempio.

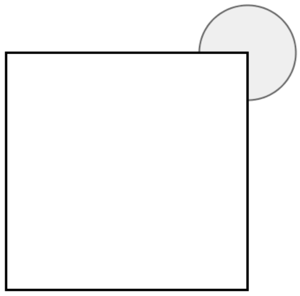




Il seguente protocollo riporta la misura di 240°, dovuta probabilmente al ragionamento dell'allievo basato esclusivamente su percezioni visive secondo le quali l'ampiezza dell'angolo noto (40°) è riportata 6 volte sull'angolo incognito, come evidenzia la rappresentazione grafica realizzata dall'allievo.



B4) Nella seguente figura è rappresentato un quadrato.



Quanto misura l'angolo indicato in grigio?

Risposta: L'angolo misura ……………………………….

Risposta corretta:
270°

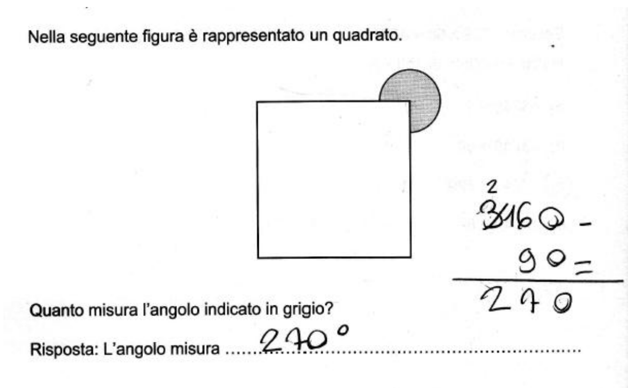
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate							Mancante/ Non valida
270°	**90°**	**180°**	**360°**	**60°**	**270 (senza udm)**	**270°**	**Altro**	
23,7	22,5	5,1	3,1	2,7	2,7	0,5	25,0	14,7

Programmi '84:
Problemi
(…) problemi di misura di capacità, peso, valore, ampiezza angolare, tempo, area (casi semplici).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

In questo quesito si chiede di individuare l'angolo esplementare di un angolo retto, che si desume dal fatto che è uno dei quattro angoli di un quadrato. Occorre quindi conoscere l'ampiezza di un angolo di un quadrato e l'ampiezza dell'angolo giro (sul concetto di angolo si veda Marazzani, 2010). A questo quesito risponde correttamente solo il 23,7% degli allievi. Riportiamo di seguito un esempio di protocollo corretto.


Nella seguente figura è rappresentato un quadrato.

2
3160 -
90 =
270

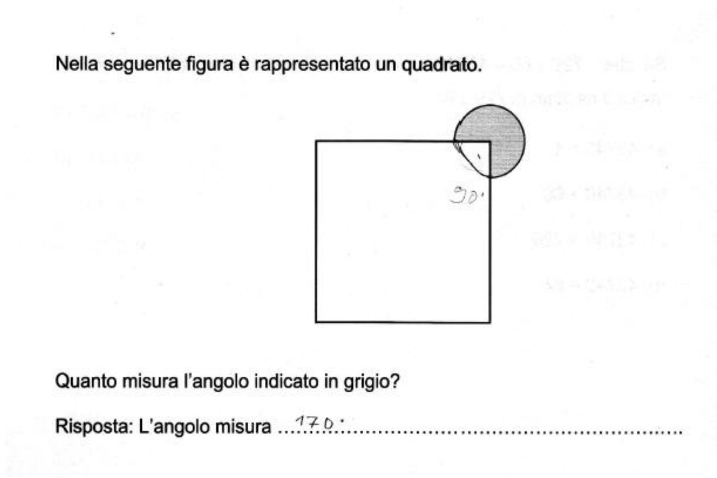
Quanto misura l'angolo indicato in grigio?

Risposta: L'angolo misura ...270°...

Tra le risposte errate, il 22,5% risponde 90°, individuando così l'angolo esplementare all'angolo indicato; il 5,1% degli allievi risponde 180°; il 3,1% risponde direttamente con l'ampiezza dell'angolo giro; il 2,7% risponde 60°; il 2,7% risponde 270 senza unità di misura, mentre lo 0,5% 270°; il 25,0% rientra nella categoria "Altro". In quest'ultima categoria l'1,2%

risponde 260°, 280°; l'1% risponde 170°, il 4,1% riporta numeri errati e senza unità di misura (ad esempio 1, 10, 80, 120, 130, 140, 60, 300, 320) e il 3,9% oltre a sbagliare il numero riporta un'unità di misura errata, come ad esempio cm, dm, ….

Si riporta di seguito un esempio di protocollo:


Nella seguente figura è rappresentato un quadrato.

90°

Quanto misura l'angolo indicato in grigio?

Risposta: L'angolo misura ...170°...

Lo 0,7% risponde in modo generico "Meno di 360", ">180<360", "più di 180"; 0,5% risponde "Non l'abbiamo fatto"; poi ci sono tantissime risposte con misure varie nella percentuale di 0,2-0,3% per ciascuna.

Dal punto di vista didattico sono significativi i vari lavori di ricerca di Mitchelmore, tra i quali Mitchelmore e White (2000), dove viene presentata una nuova teoria dello sviluppo del concetto di angolo.

3.3. Perimetro

B5) Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?

....

Possibile risposta corretta:
13 × 3 = 39 (cm)

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate					Mancante/ Non valida
39 cm o equivalenti	**39**	**13 cm**	**26 cm**	**52 cm**	**Altro**	
40,2	14,0	2,4	1,2	1,0	15,0	26,2

Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo, ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.
Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di calcolare il perimetro di una figura.

Questo quesito richiede di individuare il perimetro di un triangolo equilatero conoscendo la lunghezza di un lato. Per rispondere correttamente occorre quindi conoscere i concetti di perimetro e triangolo equilatero. Le caratteristiche di quest'ultimo sono desumibili dall'unica lunghezza del lato fornita. Tale quesito rientra quindi nell'ambito di competenza "Grandezze e misure" piuttosto che nell'ambito "Geometria".

A questo quesito solo il 40,2% risponde correttamente. Sono state considerate corrette anche le risposte espresse nel seguente modo 13 × 3 = 39 cm, dove i fattori della moltiplicazione erano numeri naturali e il risultato una grandezza, anche se sarebbe stato più corretto dal punto di vista formale fare una delle due scelte seguenti: 13 cm × 3 = 39 cm o 13 × 3 = 39 (cm).

Riportiamo di seguito due esempi di protocolli corretti, nel primo l'allievo applica la proprietà distributiva per effettuare il calcolo, nel secondo effettua la somma delle lunghezze dei lati:

Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?

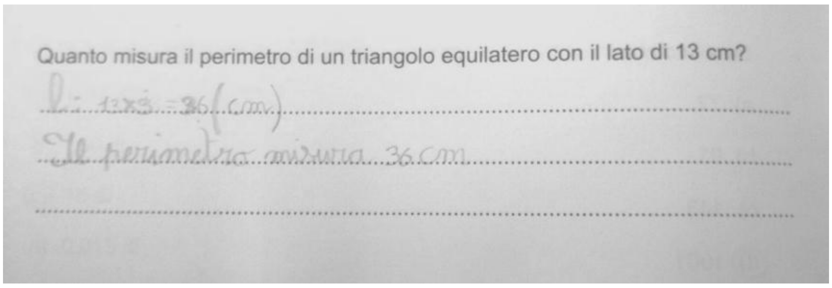
$P: 13 \times 3 = (\overset{30}{10 \times 3}) + (\overset{9}{3 \times 3}) = 39$ cm

R: Il perimetro di un triangolo equilatero con i lati di 13cm è di 39cm.

Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?

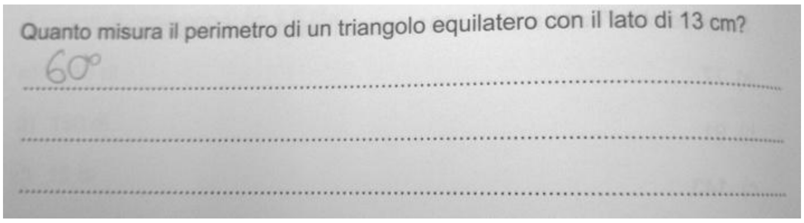
P= l x 3
P= 13+13+13
P= 39Cm

Le risposte errate sono distribuite tra diverse tipologie: ben il 14% omette l'unità di misura, il 2,4% scrive come risultato la lunghezza di un solo lato; l'1,2% moltiplica la lunghezza di un lato per due; l'1% la moltiplica per quattro, invece che per tre, confondendo un triangolo equilatero con un quadrato, evidenziando così lacune anche sul concetto di triangolo equilatero. Nella tipologia "Altro" vi è un 1% che risponde 36 cm, commettendo dunque errori di calcolo, come mostra il seguente protocollo.

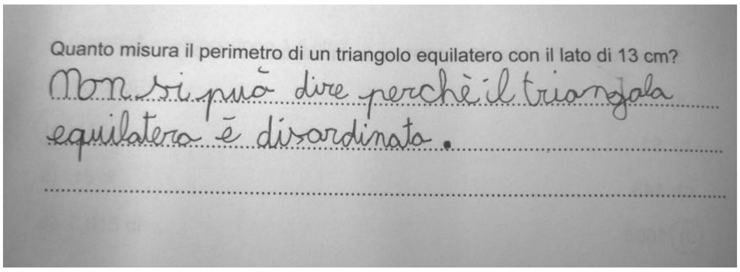

Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?
l: 13x3 = 36(cm)
Il perimetro misura 36 cm

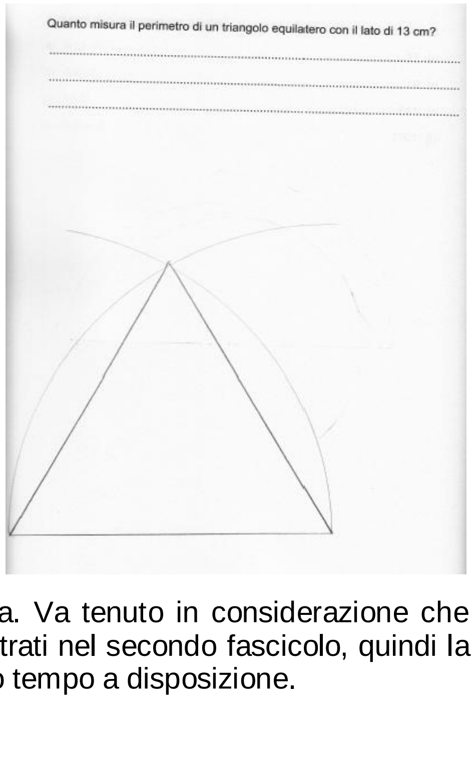
Lo 0,9% afferma: "Non si può dire", "Non lo so" o "Bisogna misurarlo"; 0,7% risponde con un'affermazione generica o incompleta: "Il perimetro misura" o "Tutti i lati sono di 13 cm"; inoltre vi sono diverse risposte con numeri di vario tipo con una percentuale di 0,2-0,3% per ogni tipologia.

Nel seguente protocollo ad esempio l'allievo ha riportato l'ampiezza di ciascun angolo interno del triangolo equilatero, trascurando la richiesta del quesito.


Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?
60°

Le tipologie di risposte errate sono davvero numerose e fantasiose, i protocolli seguenti ne sono un esempio. Sarebbe stato interessate intervistare l'allievo per sapere il significato attribuito a quel termine "disordinato".


Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?
Non si può dire perchè il triangola equilatera è disordinato.


Quanto misura il perimetro di un triangolo equilatero con il lato di 13 cm?

Il 26,2% non risponde o fornisce una riposta non valida. Va tenuto in considerazione che questo rappresenta il 28-esimo quesito dei 60 somministrati nel secondo fascicolo, quindi la causa non deriva dalla stanchezza degli allievi o dal poco tempo a disposizione.

B6) Un quadrato ha il perimetro di 32 cm.
Trova quanto misura il suo lato.
……

Possibile risposta corretta:
32 : 4 = 8 (cm)

Risultati:

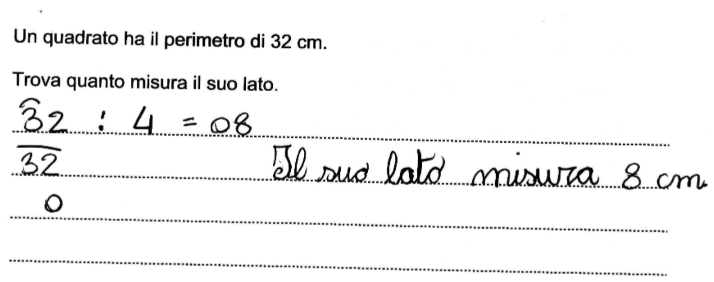
Risposta corretta	Risposte errate					Mancante/ Non valida
8 cm o equivalenti	**8**	**32 cm**	**128 cm**	**6 cm**	**Altro**	
43,9	6,7	4,6	2,7	0,8	18,1	23,2

Programmi ’84:
Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

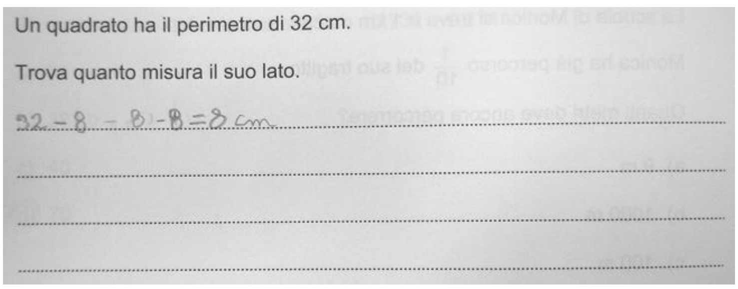
Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).

Questo quesito richiede una competenza inversa rispetto al quesito precedente, ossia chiede di individuare la lunghezza di un lato di un quadrato conoscendo il suo perimetro. Occorre quindi conoscere i concetti di perimetro e di quadrato e desumere il procedimento per ricavare la lunghezza di un lato. L’allievo, oltre a sapere come si trova il perimetro di un quadrato, deve attivare un ragionamento inverso e quindi aver sperimentato che la divisione è l’operazione inversa della moltiplicazione o il concetto di divisione come ripartizione equa.

Anche questo quesito rientra nell’ambito “Grandezze e misure” piuttosto che nell’ambito “Geometria”. A questo quesito risponde correttamente il 43,9% degli allievi, percentuale paragonabile al quesito precedente. Di seguito si riporta il protocollo di un allievo che risolve correttamente il quesito, ma che applica fedelmente l’algoritmo scritto per un calcolo che si sarebbe potuto fare a mente, fino ad arrivare a scrivere il risultato espresso nella forma 08.

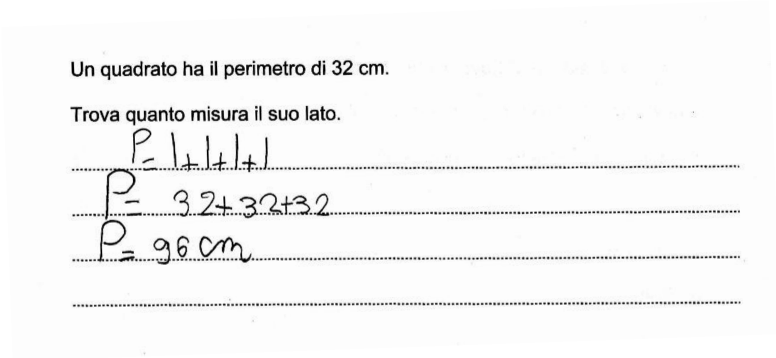

Un quadrato ha il perimetro di 32 cm.
Trova quanto misura il suo lato.
32 : 4 = 08
32 Il suo lato misura 8 cm
0

Quello che segue è il protocollo di un allievo che risponde correttamente 8 cm, riportando un procedimento insolito:


Un quadrato ha il perimetro di 32 cm.
Trova quanto misura il suo lato.
32 - 8 - 8 - 8 = 8 cm

Tra le risposte errate il 6,7% omette l'unità di misura, rispondendo 8; il 4,6% degli allievi risponde 32 cm, confermando il valore del perimetro anche per la lunghezza di un solo lato; il 2,7% risponde 128 cm moltiplicando per quattro il perimetro, senza intuire che il procedimento risolutivo era inverso. Lo 0,8% risponde 6 cm, mettendo in evidenza errori di calcolo. Il 18,1% è stato catalogato in "Altro": l'1,2% risponde 128 senza unità di misura, lo 0,7% risponde: "Non lo so" o "Non lo posso sapere", lo 0,5% risponde 4, associando la risposta al numero di lati del quadrato, inoltre vi sono tantissime risposte con numeri di vario tipo con una percentuale di 0,2-0,3% per ogni tipologia.

Riportiamo di seguito due protocolli come esempi:

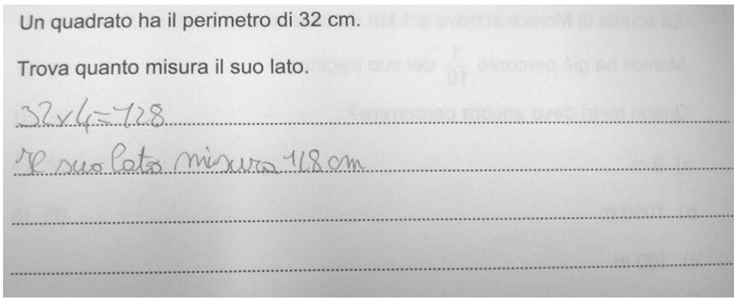

Un quadrato ha il perimetro di 32 cm.

Trova quanto misura il suo lato.

P= l+l+l+l

P= 32+32+32

P= 96 cm


Un quadrato ha il perimetro di 32 cm.

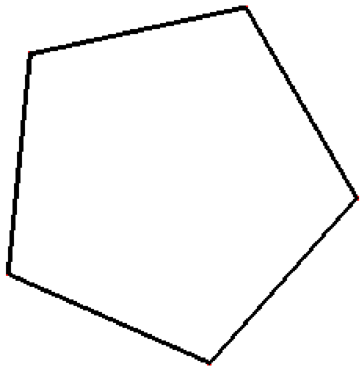
Trova quanto misura il suo lato.

32x4=128

Il suo lato misura 128 cm

Va segnalato che il 23,2% lascia la risposta mancante o non valida, bisogna tener conto che questo rappresenta il 31-esimo quesito dei 60 somministrati nel secondo fascicolo, quindi le mancanze non dovrebbero dipendere dall'eccessivo numero di quesiti somministrati.

B7) Lisa possiede una corda lunga 20 dm. La utilizza tutta per tracciare il contorno di un pentagono regolare.



Quanto misura un lato del pentagono?
……

Possibile risposta corretta:
20 : 5 = 4 (dm)
oppure 4 dm

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate						Mancante/ Non valida
4 dm o equivalenti	**4 cm**	**3,7 cm**	**3,8 cm**	**4**	**5 dm**	**Altro**	
26,2	12,9	9,3	7,8	2,5	1,3	21,2	18,8

Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
• loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo, ecc.);
• loro definizione;
• perimetro.
Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Matematizzare, trasporre
L'allievo è in grado di tradurre una situazione della vita quotidiana in un linguaggio matematico tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Questo quesito è analogo al precedente, solo che il perimetro è riferito a un pentagono regolare, tipologia di poligoni contemplata nei Programmi del 1984 per quanto concerne la quarta elementare, ma che non viene proposto dalla maggior parte dei docenti prima della quinta elementare. In questo caso vi è una differenza tra il curricolo "ufficiale" (o *curriculum intended*), che è costituito dall'insieme di documenti promulgati dall'autorità educativa e il curricolo "sviluppato" (o *curriculum implemented*), che è costituito dall'insieme delle nozioni, prassi, metodologie didattiche e valutative che l'insegnante realmente usa in aula. Anche in questo caso il quesito rientrerebbe nell'ambito "Grandezze e misure" piuttosto che nell'ambito "Geometria".

Nel testo di questo quesito non viene citata la parola perimetro, ma viene raccontata l'azione concreta di far aderire una corda lunga 20 dm sul contorno del pentagono, cercando di rendere più intuitivo il concetto in gioco. Tale testo è supportato da una rappresentazione figurale.

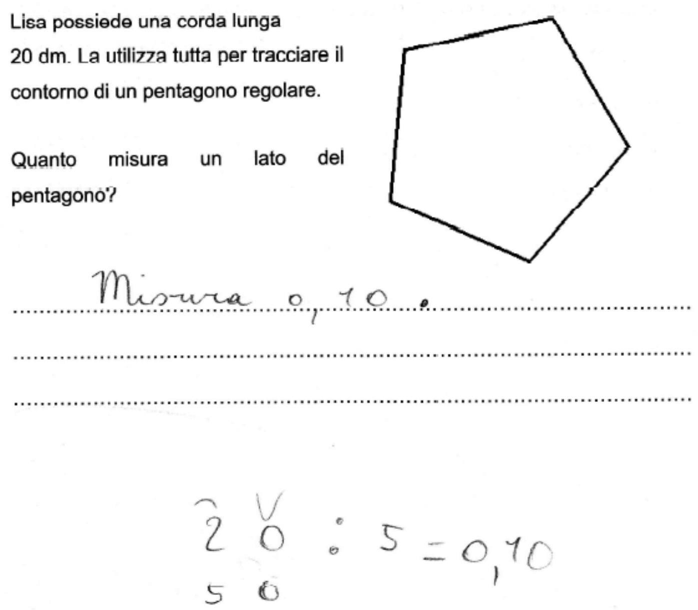
A questo quesito risponde correttamente il 26,2% degli allievi. In particolare, il 17,9% scrive direttamente il risultato, mentre l'8,3% degli allievi indica anche il procedimento: 20:5=4 dm.

Tra le risposte errate il 12,9% degli allievi sbaglia unità di misura indicando i cm invece dei dm; il 2,5% omette l'unità di misura; il 9,3% risponde 3,7 cm; mentre il 7,8% risponde 3,8 cm. Gli ultimi due risultati vanno interpretati tenendo conto che le lunghezze di ciascun lato del pentagono rappresentato sul fascicolo sono circa 3,7 cm. Va quindi rilevata l'esigenza di molti allievi di voler desumere il risultato del problema dalla misurazione con il righello della lunghezza del lato della figura rappresentata, che non rispettava i dati del testo, piuttosto che dai dati numerici. In questo quesito aver rappresentato la figura, addirittura con dimensioni erronee, è risultato un inganno per gli allievi piuttosto che un aiuto alla risoluzione. Sul ruolo del disegno in ambito geometrico si veda Mariotti (2005).

Come nei quesiti precedenti la percentuale degli alunni che risponde con un risultato numerico corretto, ma senza unità di misura o con una sbagliata, è piuttosto alta: questo potrebbe indicare una mancanza di consapevolezza del concetto di misura, grandezza e unità di misura. Lo studente si concentra nello svolgimento del calcolo richiesto perdendo di vista il significato del numero nel contesto presentato.

Va inoltre segnalato che il 21,2% degli allievi rientra nella categoria "Altro", tra questi l'1,2% scrive 3,5; l'1,2% scrive 3,5 cm; l'1% scrive 3,8 dm e via dicendo.

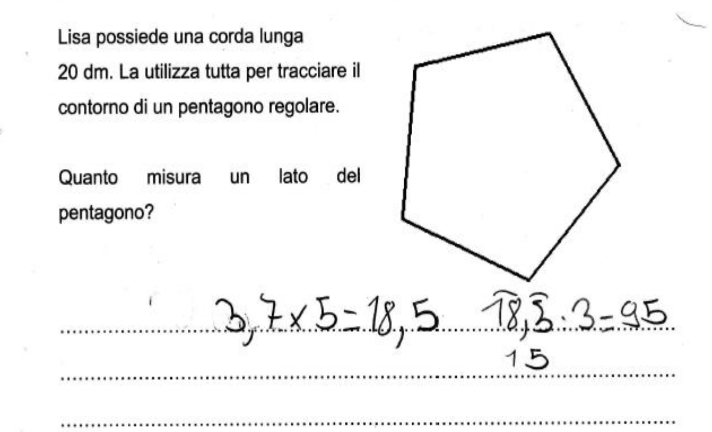
Si riportano di seguito a mo' di esempi due protocolli errati di due studenti che rientrano nella categoria "Altro":


Lisa possiede una corda lunga 20 dm. La utilizza tutta per tracciare il contorno di un pentagono regolare.

Quanto misura un lato del pentagono?

Misura 0,10.

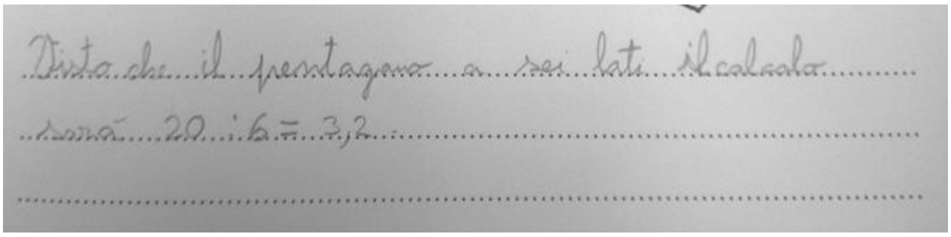
20 : 5 = 0,10
50


Lisa possiede una corda lunga 20 dm. La utilizza tutta per tracciare il contorno di un pentagono regolare.

Quanto misura un lato del pentagono?

3,7x5=18,5 18,5:3=95
15

Nel seguente protocollo l'allievo specifica il ragionamento attuato, ma nonostante la presenza della figura non individua il numero corretto dei lati di un pentagono.

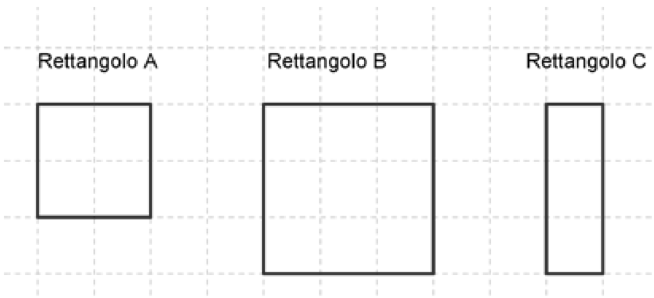


Visto che il pentagono a sei lati il calcolo sarà 20 : 6 = 3,2

Va inoltre segnalato che il 18,8% degli allievi non risponde al quesito, da questo punto di vista va osservato che questo rappresenta il 49-esimo quesito dei 60 presenti nel secondo fascicolo, quindi è stato affrontato nella parte finale della prova.

3.4. Confronto di perimetri

B8) Osserva le figure seguenti.



Una delle affermazioni seguenti è corretta. Quale?

a) Il perimetro del rettangolo A è uguale al perimetro del rettangolo B.
b) Il perimetro del rettangolo A è uguale al perimetro del rettangolo C.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
31,7	61,6	6,7

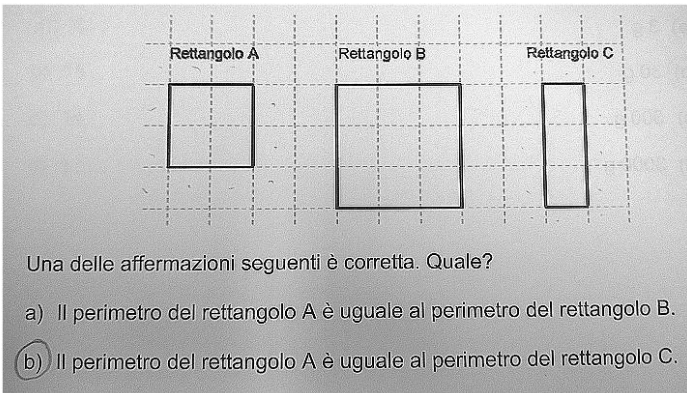
Programmi '84:
Figure geometriche
Studio di poligoni (quadrilateri, triangoli, poligoni regolari):
- loro classificazione secondo criteri diversi (ad esempio: diagonali, assi di simmetria, parallelismo, ecc.);
- loro definizione;
- perimetro.

Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di calcolare il perimetro di una figura.
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di analizzare relazioni tra perimetri e aree di figure.
L'allievo è in grado do stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

Questo quesito richiede il confronto di perimetri di tre rettangoli rappresentati su un piano quadrettato, potrebbe quindi comportare un semplice conteggio dei segmenti che formano il contorno delle figure. Anche questo, come i precedenti, rientrerebbe nell'ambito "Grandezze e misure" invece che nell'ambito "Geometria". Il quesito è a risposta multipla con solo due scelte, quindi con un'alta probabilità di riuscita anche procedendo in modo casuale. Al quesito risponde in modo corretto solo il 61,6% degli allievi. Le difficoltà rilevate dagli studenti nel confrontare lunghezze di percorsi su piani quadrettati vengono quindi confermate anche per i perimetri su piani quadrettati; i risultati possono essere confrontati con quelli dei primi due B1) e B2).

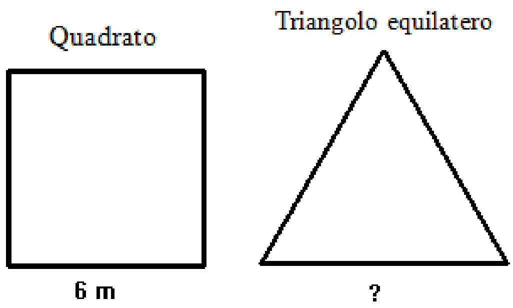
Dal protocollo qui a fianco si evince che l'allievo ha confrontato i perimetri delle figure A e C contando i quadretti e non i lati dei quadretti e lasciando per ciascuno un puntino tracciato con la penna. Il risultato in questo caso non cambia, ma il metodo di conteggio è assolutamente errato.



Il quesito risulta semplice a livello cognitivo anche perché la risposta corretta è sostenuta dall'aspetto percettivo, essendo il quadrilatero di perimetro maggiore quello che ha anche l'area maggiore. In questo quesito come in quelli successivi i concetti di perimetro e area delle figure rimangono sempre distinti: o si chiede un concetto o l'altro, quando didatticamente sarebbe invece molto interessante confrontare contemporaneamente i due concetti per le stesse figure (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005). In particolare, in Marchini (1999) si parla del conflitto tra i due concetti: perimetro e area e del modo didattico di affrontare l'argomento per venirne a capo, basato più sul confronto che sulla separazione dei due concetti; l'articolo contiene molte considerazioni di grande pregio e di ampio respiro non solo didattico, ma pure matematico ed epistemologico. Vale la pena segnalare anche l'articolo di Chamorro (2001-02) che riporta analisi di esperienze realizzate nella scuola elementare a proposito del problema dell'insegnamento – apprendimento della misura ed in modo specifico di perimetro ed area; lo scopo di questo studio è di contribuire alla realizzazione di sapienti situazioni a-didattiche ed ingegnerie tese ad eliminare, o almeno a contenere, le ben note difficoltà di apprendimento.

Ritornando al quesito, sorprende che ben il 31,7% degli allievi sostenga che i perimetri della figura A e B sono uguali, pur essendo facilmente verificabile il contrario. Manca forse l'abitudine a verificare quantitativamente la veridicità delle proprie intuizioni. Già Speranza nel 1987, insieme a considerazioni epistemologiche di straordinario interesse culturale, dimostra come le difficoltà concettuali rilevate nella scuola elementare su questioni connesse con area e perimetro permangono anche tra allievi evoluti, anche fino all'università.

B9)



Le due figure disegnate sopra rappresentano la pianta di due orti che hanno lo stesso perimetro.
Quanto misura il lato dell'orto a forma di triangolo equilatero?
…………………………………………………………………………………………

Possibile risposta corretta:
6 × 4 = 24 (m)
24 : 3 = 8 (m)

Risultati:

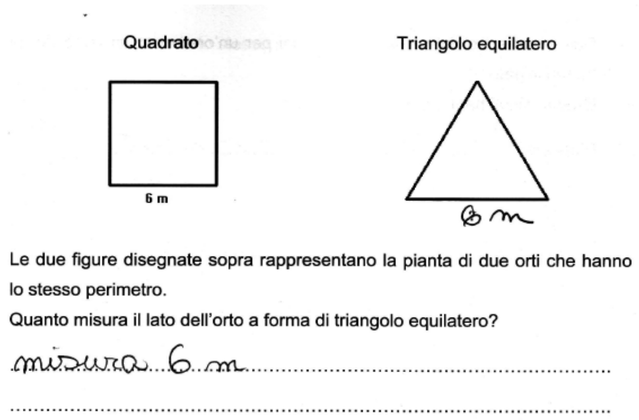
Risposta corretta	Risposte errate									Mancante/ Non valida
8 m o equivalenti	**4 cm**	**6 m**	**4 m**	**3,9 cm**	**8 cm**	**2 m**	**12 m**	**18 cm**	**Altro**	23,9
14,5	7,8	6,3	3,6	3,6	3,4	2,0	1,9	1,7	31,3	

Programmi '84:
Problemi
Problemi sulle misure di lunghezza, anche in relazione ai poligoni studiati; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).
L'allievo è in grado di analizzare relazioni tra perimetri e aree di figure.

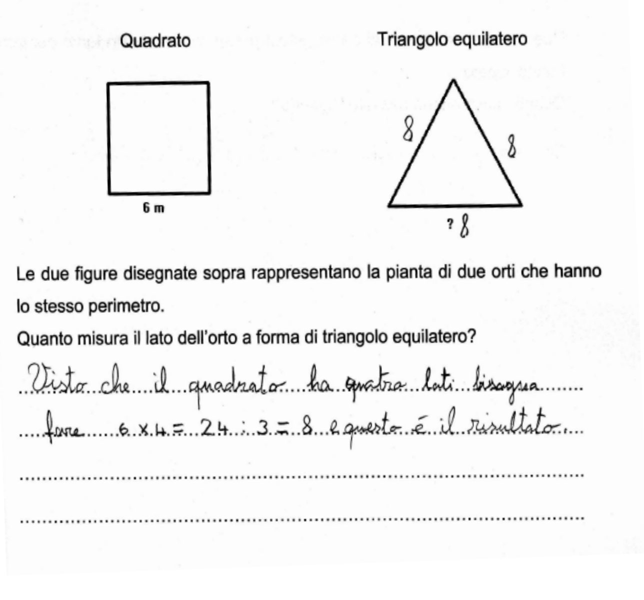
Se già i quesiti precedenti riguardanti confronti di lunghezze e perimetri ottenevano basse percentuali di riuscita, pur essendo i testi semplici e le figure rappresentate su piani quadrettati, si prevede che anche questo quesito, più complesso dei precedenti, ottenga una percentuale alta di risposte errate. In effetti, solo il 14,5% degli allievi risponde correttamente, fornendo 8 m come risposta esatta.

Tra le risposte errate il 3,6% risponde 4 m e il 7,8% degli allievi 4 cm, che corrisponde alla lunghezza del lato del triangolo rappresentato nel testo, che è stato misurato dagli allievi con il righello. Anche in questo quesito, il disegno rappresentato nel testo, con le lunghezze diverse da quelle considerate dai dati numerici, condiziona negativamente la risoluzione invece di essere di aiuto. Il disegno, inteso come sistema di segni grafici, ha accompagnato da sempre le attività geometriche fin dagli albori della loro storia, intrattenendo con gli "oggetti" della geometria un rapporto molto stretto. Come riferisce Mariotti (2005) l'ambiguo legame tra il mondo geometrico e quello grafico, tra geometria e disegno, è testimoniato dal termine "figura", usata correntemente per intendere sia il concetto matematico (astratto, ideale e ben definito) che una sua rappresentazione grafica esterna. Dal punto di vista didattico occorrerebbe fare attenzione alla distinzione tra questi due mondi: geometrico e grafico.



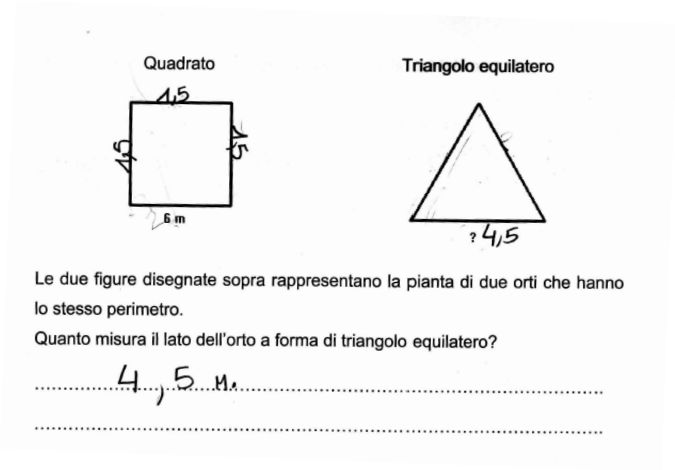
Al quesito il 6,3% risponde 6 m, ossia la stessa lunghezza del lato del quadrato, nonostante i disegni, che non avevano le misure corrispondenti ai dati del problema, fossero in proporzione, e potevano quindi dare indicazioni sul fatto che la lunghezza del lato del triangolo doveva essere maggiore di quella del quadrato. Riportiamo qui a fianco un protocollo come esempio.

Il 3,6% risponde 3,9 cm che corrisponde all'incirca alla misurazione effettuata con il righello; l'1,9% risponde 12 m, che si ottiene moltiplicando la lunghezza del lato di 6 m per due e via dicendo. Va osservato che il 31,3% delle risposte rientra nella categoria "Altro" dove sono presenti svariate risposte: l'1,4% risponde 7 m; l'1% risponde 3,7 cm, 11,7, 8, 24; seguono tantissime risposte con numero di vario tipo con una percentuale dello 0,2-0,3% di risposte.



Riportiamo qui a fianco un esempio di protocollo considerato errato in quanto non è specificata l'unità di misura che mette inoltre in evidenza un uso scorretto del segno di uguale, utilizzato in senso procedurale, ossia come "segno direzionale" orientato da sinistra verso destra, invece che come relazione binaria (Kieran, 1988; Camici et al., 2002).

Riportiamo di seguito un altro protocollo della categoria “Altro” a mo’ di esempio:


Quadrato

4,5

4,5

4,5

6 m

Triangolo equilatero

? 4,5

Le due figure disegnate sopra rappresentano la pianta di due orti che hanno lo stesso perimetro.

Quanto misura il lato dell'orto a forma di triangolo equilatero?

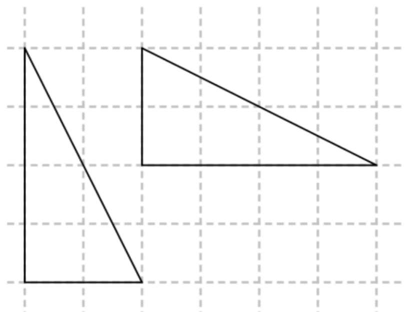
4,5 m.

In questo protocollo è evidente come l’allievo abbia interpretato il dato 6 m sulla figura non come misura del lato del quadrato, ma come il suo perimetro.

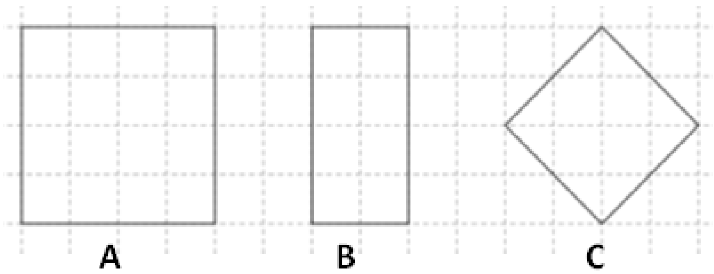
Va segnalato che il 23,9% degli allievi fornisce una risposta mancante o non valida. Questo quesito rappresenta il 55-esimo quesito dei 60 somministrati nel secondo fascicolo.

3.5. Equiscomposizione

B10) Natalia ritaglia le seguenti figure:



Quale delle seguenti figure A, B o C può ottenere avvicinando i due pezzi che ha ritagliato?



Risposta: La figura ………………………………………….

Risposta corretta:
Figura B

Risultati:

A	B	C	Mancante/ Non valida
13,1	63,1	9,0	14,8

Programmi '84:
Figure geometriche
Avvio al concetto di area attraverso la costruzione di figure equiestese.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di scomporre opportunamente triangoli e quadrilateri e ricomporli per permettere un calcolo semplificato dell'area.

Questo quesito verte sulla equiscomposizione delle figure del piano, attività molto formativa per l'avvio del concetto di area e che di solito viene già proposta fin dal primo ciclo della scuola dell'obbligo tramite attività tipo *tangram* e scomposizioni di altre figure del piano.

Solo il 63,1% degli allievi risponde correttamente, pur essendo la domanda molto semplice e intuitiva. Va considerato che il quesito fornisce inizialmente una consegna generica: "Natalia ritaglia le seguenti figure" senza affermare che il ritaglio deve seguire il contorno dei triangoli. Seguendo solo la prima indicazione risulterebbero corrette sia la risposta B che la C, in effetti ritagliando i triangoli in piccoli pezzi è possibile ricoprire anche la figura C, equiestesa alla B. Solo nella seconda parte del testo la consegna diventa più precisa affermando che i pezzi sono solo due (… avvicinando i due pezzi che ha ritagliato?), anche se si poteva continuare a intendere due pezzi convenientemente scomposti, uscendo dall'interpretazione che viene più spontanea ipotizzare. Il 9% degli allievi risponde C. Invece, ben il 13,1% degli allievi risponde A, pur essendo questa figura non ottenibile dalla combinazione dei due triangoli iniziali, avendo addirittura area doppia rispetto alla somma delle aree dei due triangoli. Ben il 14,8% degli allievi non risponde a questo intuitivo quesito.

3.6. Confronto di aree

B11) Luca ha deciso di ricoprire di carta colorata la superficie della figura *A*. Francesco ha deciso di fare lo stesso con la superficie della figura *B*.

Figura *A*

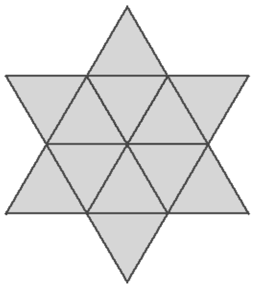
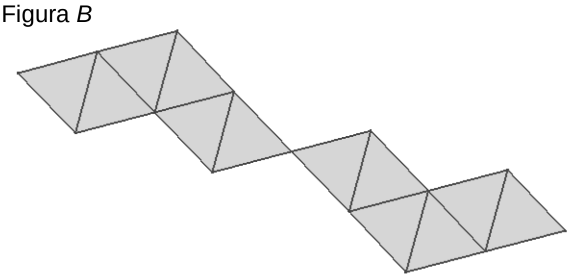


Figura *B*



Sapendo che i triangoli di cui sono composte le due figure sono perfettamente sovrapponibili, quale dei due bambini ha utilizzato più carta?

a) Luca.
b) Francesco
c) Nessuno: le due figure hanno la stessa area.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
11,0	7,3	80,0	1,7

Programmi '84:
Figure geometriche
Avvio al concetto di area attraverso la costruzione di figure equiestese.
Misure di area
Confronto diretto di aree mediante scomposizione di una figura e sovrapposizione delle sue parti sull'altra.
Misurazione di aree mediante unità di misura (ricoprimenti o quadrettatura).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di scomporre opportunamente triangoli e quadrilateri e ricomporli per permettere un calcolo semplificato dell'area.
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

Questo quesito verte sul concetto di equiestensione ed è contestualizzato tramite una situazione del mondo reale di ricoprimento di superfici con carta. In pratica si vuole valutare se l'allievo è in grado di cogliere l'invarianza della misura superficiale al variare della forma. La risoluzione richiede il conteggio dei triangoli presenti nelle due figure. Questo quesito viene risolto correttamente dall'80% degli allievi.

Si riporta di seguito un protocollo come esempio:

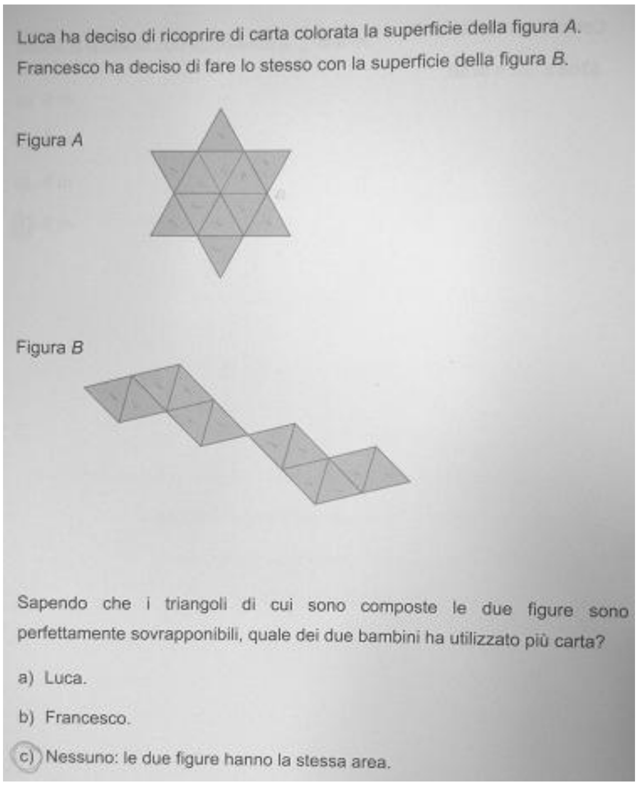

Luca ha deciso di ricoprire di carta colorata la superficie della figura *A*.
Francesco ha deciso di fare lo stesso con la superficie della figura *B*.

Figura *A*

Figura *B*

Sapendo che i triangoli di cui sono composte le due figure sono perfettamente sovrapponibili, quale dei due bambini ha utilizzato più carta?

a) Luca.
b) Francesco.
c) Nessuno: le due figure hanno la stessa area.

Tra le risposte errate, l'11% risponde che ha utilizzato più carta Luca, mentre il 7,3% sostiene che ne ha utilizzata di più Francesco.

B12) Osserva le due figure sottostanti. Le parti in grigio sono perfettamente sovrapponibili. Le parti in bianco sono ottenute da quelle in grigio mediante o una simmetria assiale o una rotazione.

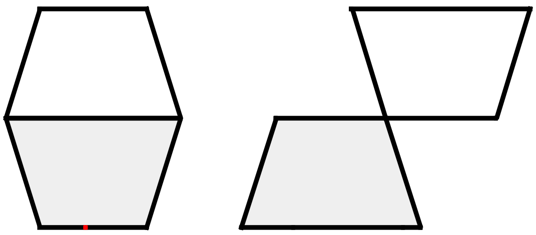


Figura 1 Figura 2

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) Le due figure hanno la stessa area.
b) L'area della Figura 1 è maggiore dell'area della Figura 2.
c) L'area della Figura 2 è maggiore dell'area della Figura 1.

Risposta corretta: a

Risultati:

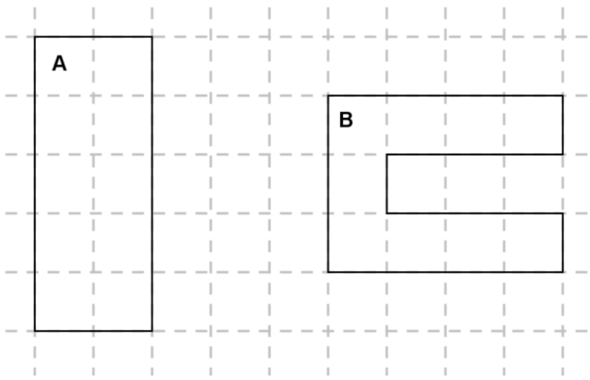
a	b	c	Mancante/ Non valida
82,1	7,2	7,5	3,2

Programmi '84:
Misure di area
Confronto diretto di aree mediante scomposizione di una figura e sovrapposizione delle sue parti sull'altra.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di scomporre opportunamente triangoli e quadrilateri e ricomporli per permettere un calcolo semplificato dell'area.
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

Il quesito richiede di riconoscere l'equiestensione di figure, le cui parti congruenti risultano disposte nel piano in modo distinto tramite isometrie (Foresti, Sangiorgi, 2011). Tale quesito si lega ai concetti di equiestensione per equiscomposizione. A questo quesito rispondono correttamente l'82,1% degli allievi, le risposte errate si distribuiscono in modo quasi equo tra le altre due categorie di risposte.

B13) Osserva attentamente le due figure A e B.



Quale delle due figure ha l'area maggiore?

a) La figura A
b) La figura B

Risposta corretta: a

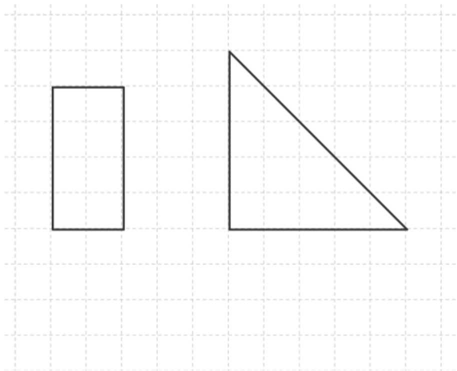
Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
84,7	12,5	2,8

Programmi '84:
Misure di area
Confronto diretto di aree mediante scomposizione di una figura e sovrapposizione delle sue parti sull'altra.
Misurazione di aree mediante unità di misura (ricoprimenti o quadrettatura).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

B14) Osserva le due figure.



Indica l'affermazione corretta riguardante i poligoni rappresentati sopra.

a) L'area del rettangolo è minore dell'area del triangolo.
b) L'area del triangolo è minore dell'area del rettangolo.
c) L'area del rettangolo è uguale all'area del triangolo.

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
83,1	11,3	2,5	3,1

Programmi '84:
Misure di area
Confronto diretto di aree mediante scomposizione di una figura e sovrapposizione delle sue parti sull'altra.
Misurazione di aree mediante unità di misura (ricoprimenti o quadrettatura).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

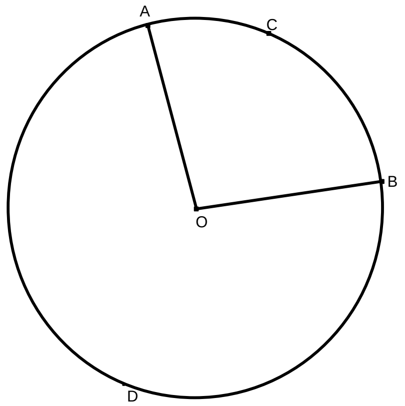
Questi due quesiti richiedono un confronto di aree di figure rappresentate su piani quadrettati, quindi rientrano nell'ambito "Grandezze e misure" piuttosto che nell'ambito "Geometria". I quesiti sono molti intuitivi in quanto richiedono il confronto di aree di solo due figure, senza mettere in relazione anche i relativi perimetri. In Outhred e Mitchelmore (1992) vengono presentati casi di allievi di fine scuola elementare in grado di eseguire confronti tra superfici di figure rettangolari, ma non in grado di estenderli ad altre figure. Va anche citata la ricerca di Iacomella e Marchini (1990) che evidenzia come vi sia un contrasto tra le misure dirette (es. con geopiani, quadrettature, …) e indirette (es. tramite il ricorso alle formule, facendo appello a misure lineari) di una superficie e come questo contrasto possa costituire un ostacolo alla comprensione.

La differenza di aree tra le due figure rappresentate risulta significativa, soprattutto nel secondo quesito, ed è quindi anche rilevabile a livello percettivo, eliminando così la necessità di compiere un ragionamento matematico. Il triangolo poteva essere per esempio costruito con i cateti di 5 e 3 unità, in modo che la sua area di 7,5 unità quadrate fosse molto vicina alle 8 del rettangolo, rendendo così difficile una risposta "a occhio". Al primo quesito rispondono correttamente l'84,7% degli allievi, va considerato che il quesito era a risposta chiusa con soltanto due possibili scelte. Il 12,5% sbaglia scegliendo l'altra figura, mentre il 2,8% non risponde o fornisce una risposta da annullare. Al secondo quesito rispondono correttamente l'83,1% degli allievi. Tra coloro che sbagliano l'11,3% risponde che l'area del triangolo è minore dell'area del rettangolo, mentre il 2,5% sostiene che l'area del triangolo è uguale a quella del rettangolo, il 3,1% degli allievi non fornisce una risposta o la fornisce da annullare.

3.7. Cerchio e suoi elementi

B15) Nella figura sottostante, la circonferenza rappresenta una piazza. O è il centro della piazza. Marco si trova nel punto A e, passando per il punto O, si sposta nel punto B.
Giaele invece si trova nel punto C e, sempre passando per O, si sposta nel punto D.
Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) Il tragitto percorso da Marco è il più lungo.
b) Il tragitto percorso da Giaele è il più lungo.
c) I tragitti percorsi dai due bambini hanno uguale lunghezza.



Risposta corretta: c

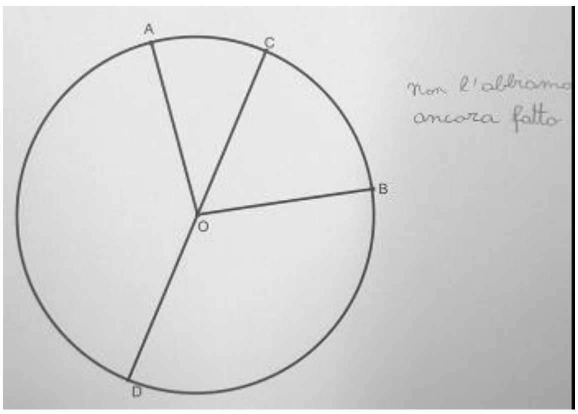
Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
11,6	18,0	65,4	5,0

Programmi '84:
Figure geometriche
Conoscenza degli elementi del cerchio (centro, raggio, diametro, circonferenza).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce e utilizza le nozioni geometriche fondamentali relative a figure del piano e dello spazio (punto, linea, retta, parallelismo e incidenza, segmento, semiretta, figura, angolo, poligono, lato, vertice, diagonale, asse di simmetria, cerchio, circonferenza, raggio, diametro, solido, poliedro, faccia, spigolo, vertice, …).
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

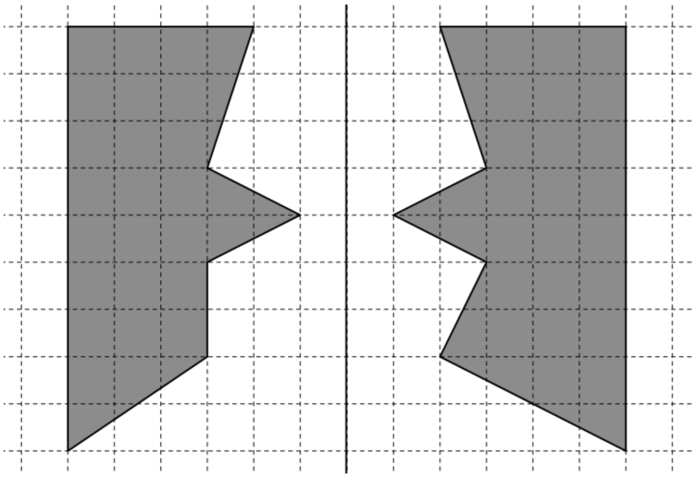
Il quesito verte sul confronto di lunghezze in un contesto inconsueto, ossia il cerchio. Si richiede di applicare delle conoscenze riguardanti alcuni elementi del cerchio: centro, raggio e diametro. Nel testo si afferma che la circonferenza rappresenta la piazza, mentre è più appropriato in questo caso il termine cerchio o l'esplicitazione che la circonferenza rappresenta il contorno della piazza. Va tenuto conto che il cerchio e i suoi elementi, pur essendo previsto dai Programmi del 1984 fin dalla quarta elementare, vengono trattati tradizionalmente in quinta, come dichiara un alunno nel protocollo qui a fianco:



Per rispondere correttamente a questa domanda si dovrebbe riconoscere che i percorsi di Marco e Giaele corrispondono entrambi a due volte il raggio del cerchio. La risposta corretta può essere data applicando diverse strategie per confrontare i due percorsi: si può utilizzare il righello e misurare i due percorsi e confrontarli; oppure si può far riferimento al fatto che il diametro CD è 2 volte il raggio ed è quindi uguale alla somma delle lunghezze di AO e OB. Tra queste due opzioni la differenza è notevole: mentre la prima richiede solo una capacità pratica di misurare segmenti con un righello, la seconda investe un ragionamento su concetti geometrici; questa distinzione non emerge dai risultati degli allievi per come è stato costruito il quesito, tale mancanza sarebbe da evitare in futuro, richiedendo eventualmente la spiegazione del ragionamento. A questo quesito risponde correttamente il 65,4% degli allievi. Tra le risposte sbagliate il 18% ritiene il diametro di lunghezza maggiore rispetto alla somma delle lunghezze di due raggi, mentre l'11,6% fa una valutazione opposta alla precedente.

3.8. Simmetria assiale

B16) Ecco come Luca ha risolto un esercizio sulla simmetria assiale.



Ha risolto correttamente l'esercizio?

a) Sì
b) No

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
26,2	72,4	1,4

Programmi '84:
Trasformazioni geometriche
Attività con le simmetrie assiali e centrali e con le traslazioni per consolidare o applicare i concetti di:
- parallelismo e perpendicolarità;
- distanza;
- angolo;
- poligono.

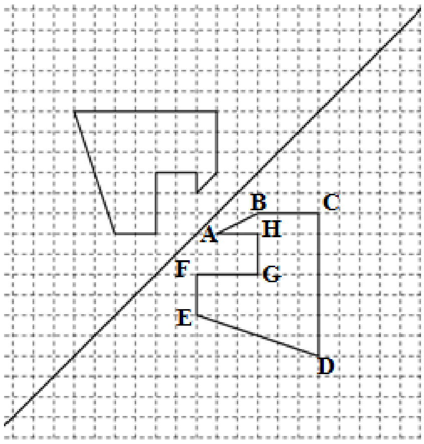
Costruzioni geometriche
Disegni su foglio quadrettato e non quadrettato:
- simmetrie assiali, centrali e traslazioni; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce figure traslate, simmetriche, ruotate in situazioni significative.
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di individuare simmetrie.

Questo quesito e i successivi rientrano nell'argomento delle isometrie, in particolare vengono richieste competenze relative alle simmetrie assiali (Foresti, Sangiorgi, 2011). Tale argomento viene presentato fin dal primo ciclo della scuola dell'obbligo tramite diverse attività legate alla lettura del mondo che ci circonda, giochi e rappresentazioni sul piano realizzate con varie tecniche.

In questo quesito si deve riconoscere se le due figure rappresentate su un piano quadrettato sono tra loro simmetriche rispetto ad un asse. Per rispondere correttamente basta osservare che le due figure non sono congruenti, condizione necessaria per poter essere considerate simmetriche, inoltre il quesito è a risposta chiusa, con solo due possibili scelte. Risponde correttamente il 72,4% degli allievi.

B17)



Piero, nell'eseguire la simmetria ha sbagliato a riportare uno dei seguenti punti. Quale?

a) Il punto A
b) Il punto B
c) Il punto C
d) Il punto D
e) Il punto E
f) Il punto F
g) Il punto G
h) Il punto H

Risposta corretta: a

Risultati:

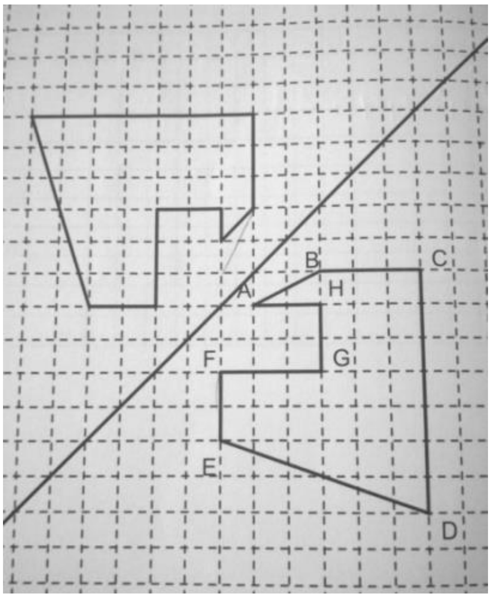
a	b	c	d	e	f	g	h	Mancante/ Non valida
70,1	12,3	1,3	1,8	1,8	0,9	1,7	3,7	6,4

Programmi '84:
Costruzioni geometriche
Disegni su foglio quadrettato e non quadrettato:
• simmetrie assiali, centrali e traslazioni; (…)

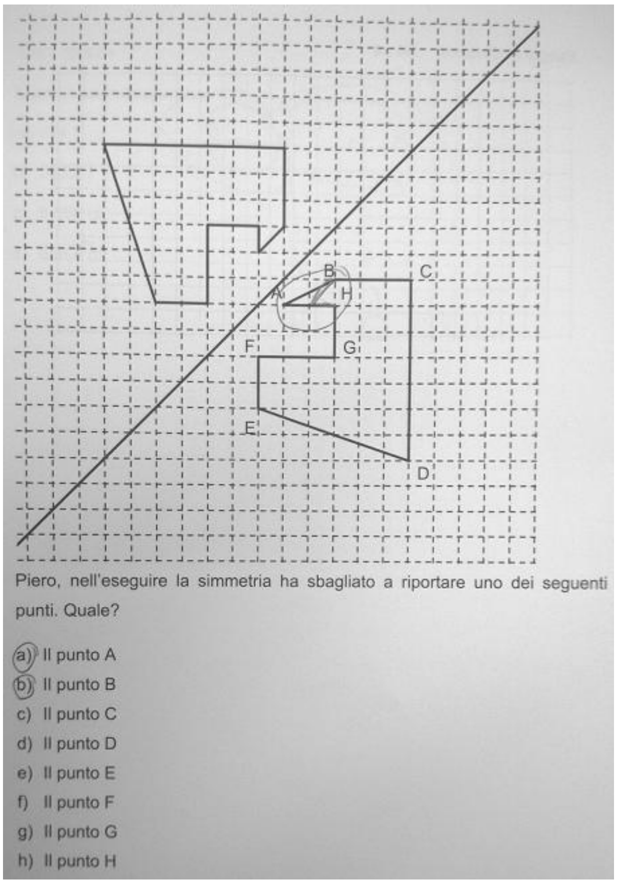
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce figure traslate, simmetriche, ruotate in situazioni significative.
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di individuare simmetrie.

In questo quesito si vuole valutare se gli allievi riescono a trovare un errore nella rappresentazione di una figura che doveva risultare simmetrica rispetto ad una assegnata. L'errore da rilevare è legato alla rappresentazione di un vertice che fa sì che le figure non siano congruenti. Il 70,1% degli allievi risponde correttamente.

Il protocollo che riportiamo di seguito, appartiene ad uno studente che risponde in modo esatto ed evidenzia nella griglia come dovrebbe essere la posizione del segmento per rispettare la simmetria tra le figure.



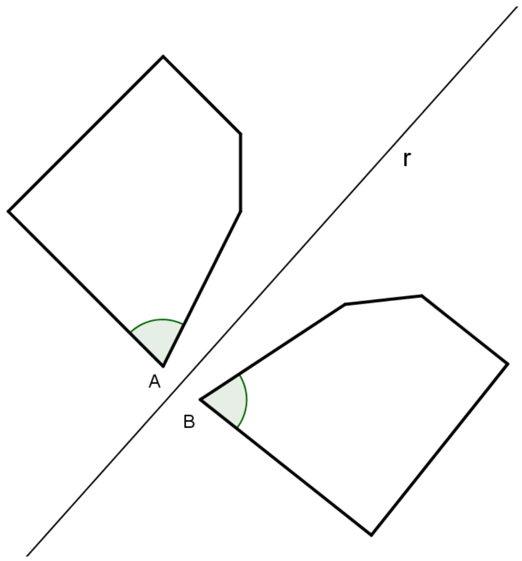
Tra coloro che rispondono in modo errato, il 12,3% degli allievi indica il vertice B e il 3,7% il vertice H che, pur essendo entrambi rappresentati in modo corretto, sono gli estremi di segmenti che non sono congruenti con quelli della figura di partenza, e quindi non sono simmetrici, rispetto a quelli corrispondenti. Le altre risposte errate si distribuiscono con piccole percentuali tra gli altri vertici. A questo quesito non risponde o fornisce una risposta non valida il 6,4% degli allievi.



Qui a fianco riportiamo il protocollo di una risposta ritenuta non valida, in quanto sono state scelte due opzioni.

L'allievo sceglie le risposte a) e b), cerchia sul disegno la parte della figura che non rispetta la simmetria e corregge il segmento, ma probabilmente non si rende conto che solo il punto A è in una posizione errata, mentre il punto B no.

B18) Le due figure sono simmetriche rispetto alla retta r:



Se l'angolo indicato in A misura 71°, quanto misura l'angolo indicato in B?

a) 109°
b) 71°
c) Per saperlo bisogna misurare l'angolo con il goniometro.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
3,8	73,2	19,0	4,0

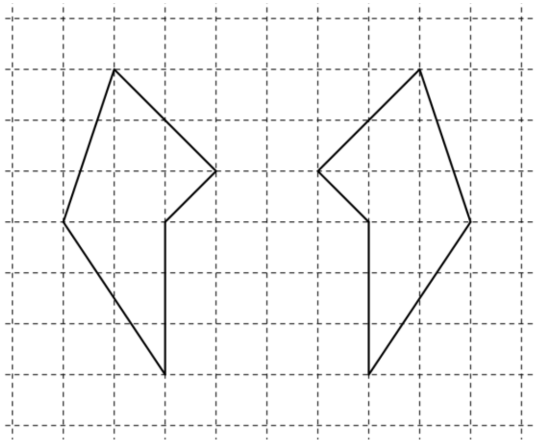
Programmi '84:
Trasformazioni geometriche
Attività con le simmetrie assiali e centrali e con le traslazioni per consolidare o applicare i concetti di:
• parallelismo e perpendicolarità;
• distanza;
• angolo;
• poligono.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di individuare simmetrie.

In questo quesito vengono mostrate due figure dichiarate simmetriche rispetto ad un asse e si vuole valutare se gli allievi considerano due angoli di queste figure della stessa ampiezza. Risponde correttamente il 73,2% degli allievi, mentre il 19% sostiene che per conoscere l'ampiezza dell'angolo bisogna misurare con il goniometro, mostrando di essere abituati a dedurre le informazioni dalla misura diretta di una figura, piuttosto che a dedurle indirettamente dalle informazioni del testo.

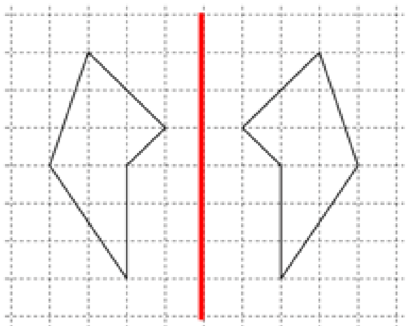
Il 3,8% sostiene che l'angolo con origine B è supplementare rispetto a quello con origine A, riportando quindi la misura di 109°.

B19) Le figure seguenti sono simmetriche:



Disegna l'asse di simmetria.

Risposta corretta:



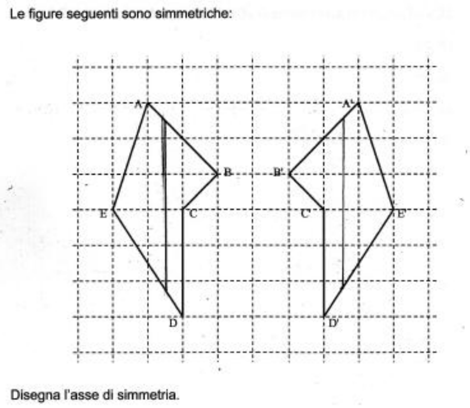
Risultati:

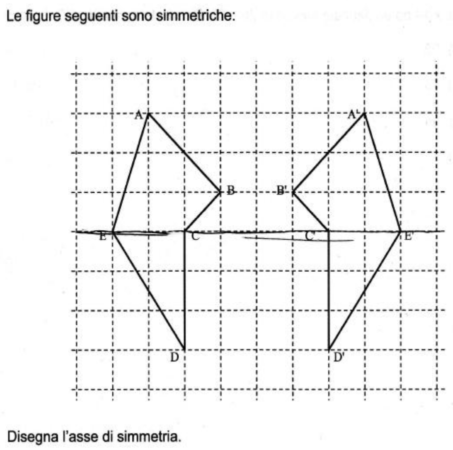
Risposta corretta	Risposte errate		Mancante/ Non valida
Disegno corretto	**Disegno di segmenti all'interno della figura**	**Altro**	
72,0	2,3	6,1	19,6

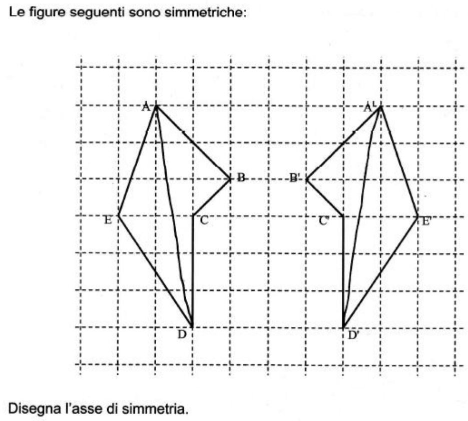
Programmi '84:
Costruzioni geometriche
Disegni su foglio quadrettato e non quadrettato:
• simmetrie assiali, centrali e traslazioni;(…)

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce figure traslate, simmetriche, ruotate in situazioni significative.
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di individuare simmetrie.

In questo quesito date due figure congruenti si chiede di disegnare l'asse rispetto al quale sono simmetriche l'una rispetto all'altra, quindi si chiede un processo inverso rispetto a quello che solitamente viene richiesto: disegnare una figura simmetrica di una data rispetto ad un asse assegnato. A questo quesito risponde correttamente il 72% degli allievi. Tra coloro che forniscono risposte errate il 2,3% disegna segmenti interni alle figure, che in realtà non sono assi di simmetria.

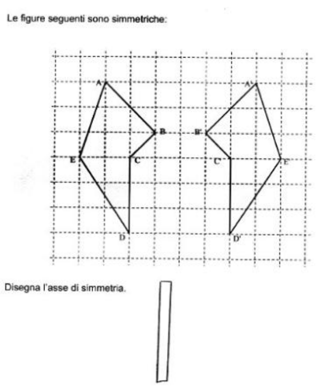


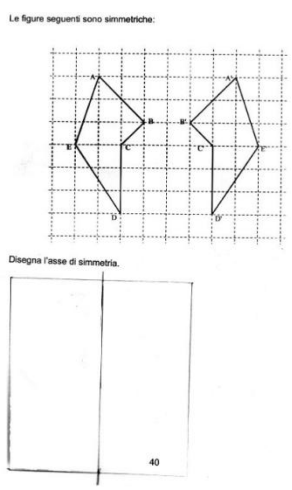


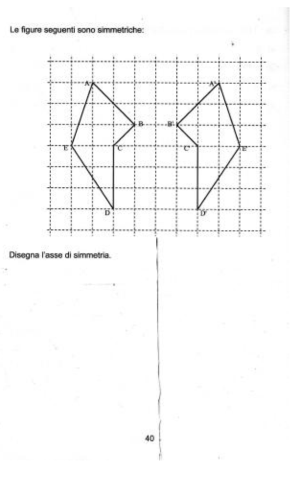


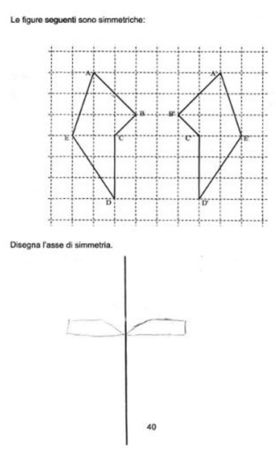
Da questo punto di vista il testo può essere considerato ambiguo, dato che si sostiene che le figure sono simmetriche; affermazione che può essere letta nel senso che ciascuna lo sia in sé e non l'una rispetto all'altra, conveniva quindi precisare "l'una rispetto all'altra". Inoltre le figure non si possono considerare simmetriche se non rispetto ad un determinato asse o ad un punto. Si poteva eliminare l'ambiguità ponendo la consegna nel seguente modo: "Le figure congruenti seguenti possono essere considerate simmetriche l'una rispetto all'altra. Disegna l'asse di simmetria rispetto al quale sono simmetriche".

Il 6,1% degli allievi rientra nella categoria "Altro"; in questa l'1,2% disegna un asse fuori dalla griglia.

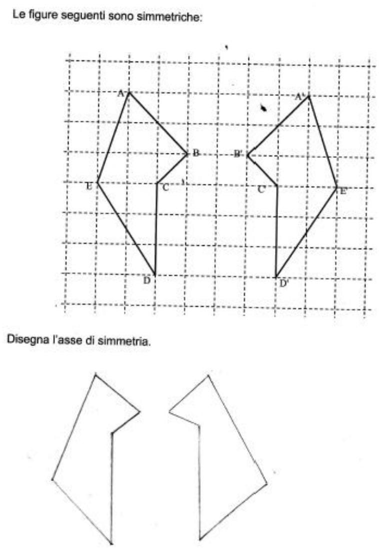




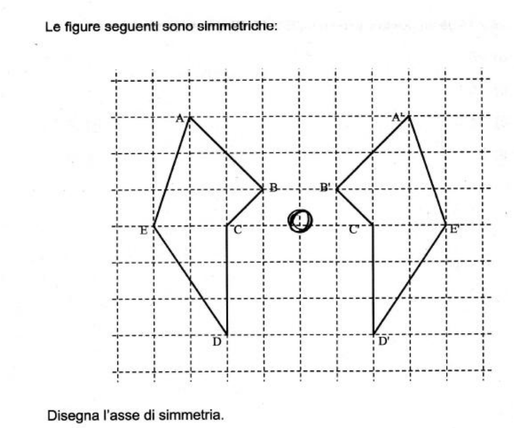


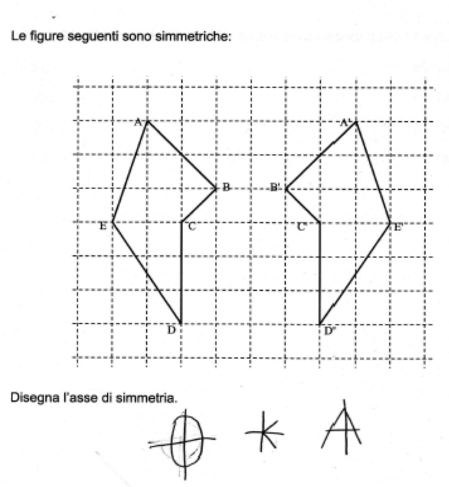


L'1,2% disegna due figure indicativamente simmetriche fuori dalla griglia senza individuare assi di simmetria. Si riporta un esempio di protocollo:

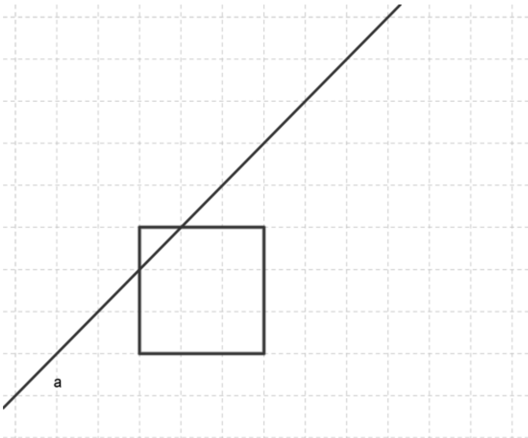


E il resto degli allievi disegna figure con assi di simmetria che però non c'entrano con il quesito o cercano possibili centri di simmetria, invece di assi.

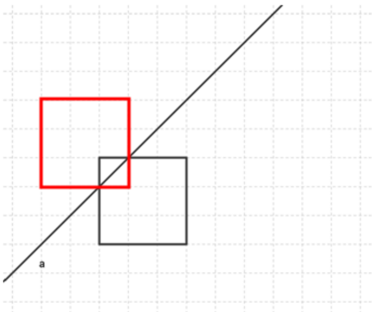




B20) Disegna l’immagine del quadrato rispetto alla simmetria assiale di asse a.



Risposta corretta:



Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate					Mancante/ Non valida
Disegno corretto	**Figura 1**	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**	**Altro**	
22,0	9,4	5,8	4,3	4,1	18,9	35,5

Programmi ’84:
Costruzioni geometriche
Disegni su foglio quadrettato e non quadrettato:
• simmetrie assiali, centrali e traslazioni; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Geometria - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di individuare simmetrie.

Le risposte errate sono state catalogate per tipologie di figure che sono riportate di seguito.

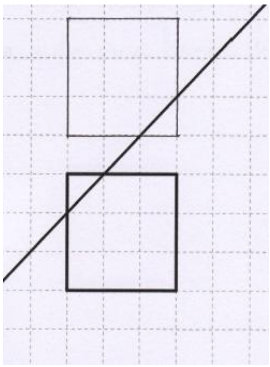


Figura 1 (9,4%)

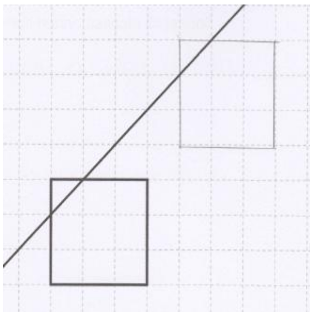


Figura 2 (5,8%)

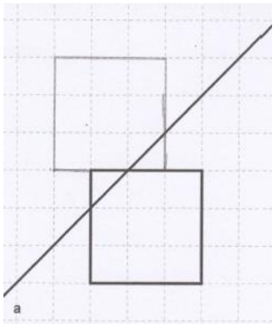


Figura 3 (4,3%)

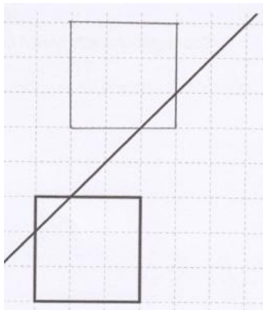
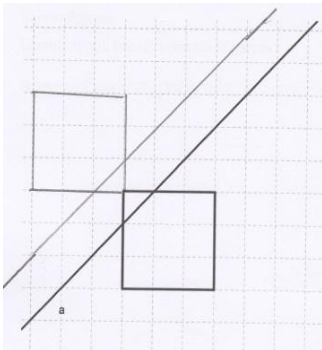
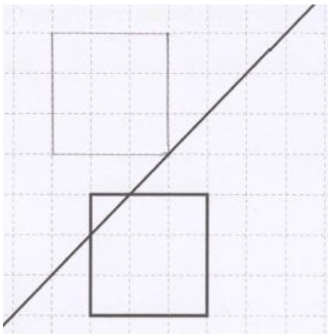


Figura 4 (4,1%)

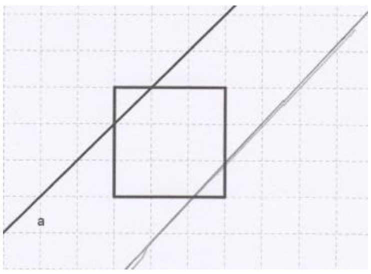
La categoria “Altro” comprende:



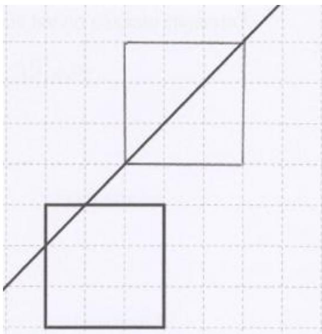
2,9% (simmetria rispetto a un vertice)



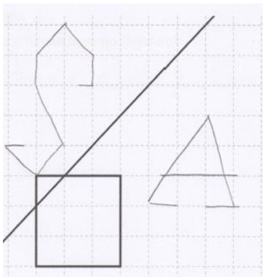
4,1% (disegni di vario tipo dove non si evince una simmetria particolare)



2,7% (retta simmetrica rispetto a una diagonale del quadrato)



3,4% (quadrato disegnato in modo che la retta sia un asse di simmetria)



2,4% (figure che non c’entrano con la figura di partenza)

4. Grandezze e Misure – Eseguire e applicare

La suddivisione tematica dei quesiti nell'ambito "Grandezze e misure", aspetto di competenza: "Eseguire e applicare", è stata individuata come segue: tempo (2 quesiti), lunghezza (2 quesiti), area (1 quesito), stima (3 quesiti), convertire unità di misura di lunghezza (6 quesiti), convertire unità di misura di massa (3 quesiti), convertire unità di misura di capacità (3 quesiti). I 20 quesiti sono così suddivisi: 5 a risposta aperta univoca e 15 a risposta chiusa, di cui 2 con 3 opzioni di scelta e 13 con 4 opzioni di scelta.

Nelle tabelle 1-2 sono riportate le risposte ai 20 quesiti, con l'indicazione delle percentuali ottenute, suddivise per tipologia: risposta chiusa, aperta univoca o aperta articolata. Sono state evidenziate le risposte corrette. Il testo di ciascun quesito con le relative percentuali di riuscita, l'individuazione della tematica relativa ai quesiti nei Programmi del 1984 e nel nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e il relativo commento didattico sono presentate di seguito. Le percentuali riportate nelle seguenti tabelle sono state calcolate in base ai risultati dell'intera popolazione di allievi (2935), alla quale sono stati somministrati i fascicoli. Per l'analisi dei protocolli e delle risposte date ai soli quesiti a risposta aperta univoca o articolata è stato selezionato un campione significativo di 414 studenti. Le percentuali riportate nelle tabelle a fianco di ciascuno dei quesiti sono state calcolate sul suddetto campione.

• Quesiti a risposta chiusa

Domanda	Risposte (%)				Mancante/ Non valida (%)
	a	b	c	d	
C1	6,8	3,5	87,5		2,2
C4	7,8	75,9	5,5	3,9	6,9
C5	19,2	37,5	26,3	1,0	16,0
C6	3,4	94,7	1,2	0,2	0,5
C7	7,4	6,7	84,5	0,5	0,9
C8	82,8	4,6	2,8	8,3	1,5
C10	22,6	37,4	23,9	9,1	7,0
C11	19,2	37,9	26,2	10,1	6,6
C13	4,1	12,8	9,4	67,1	6,6
C14	19,7	3,9	16,7	54,4	5,3
C15	37,4	38,3	12,2	7,5	4,6
C16	23,2	23,3	39,5	8,7	5,3
C17	20,4	21,4	49,7		8,5
C18	26,3	57,3	6,3	3,3	6,8
C19	16,4	21,3	58,3	0,8	3,2

• Quesiti a risposta aperta univoca

Domanda	Risposte corrette (%)	Risposte errate (%)	Mancante/ Non valida (%)
C2	25,4	58,2	16,4
C3	26,1	42,8	31,1
C9	66,3	27,1	6,6
C12	21,7	64,7	13,6
C20	42,9	34,8	22,3

Tabella 1-2: Risposte alle diverse tipologie di quesiti

4.1. Tempo

C1) Quanti minuti ci sono in 3 ore?

a) 360 minuti
b) 300 minuti
c) 180 minuti

Risposta corretta: c

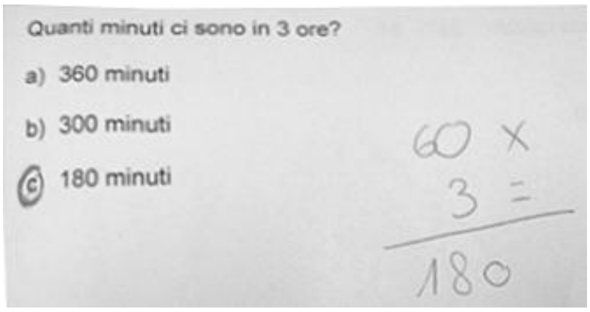
Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
6,8	3,5	87,5	2,2

Programmi '84:
Misure di tempo
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali: giorno, ora, minuto, secondo e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).

Il quesito chiede di individuare quanti minuti ci sono in tre ore. Per rispondere correttamente è quindi necessario conoscere i minuti in un'ora e moltiplicare per tre questo numero. È risaputo come la dimensione temporale, insieme a quella spaziale, è alla base di tutte le conoscenze, ma soprattutto della formazione e dello sviluppo dell'identità del bambino. Risulta quindi indispensabile prevedere interventi educativi e didattici specifici, anche extrascolastici, in modo da garantire il più possibile lo sviluppo di conoscenze e abilità spazio-temporali nel bambino. Tramite questo quesito gli studenti mostrano di avere una buona conoscenza dell'argomento, particolarmente legato alla vita quotidiana. Si registra, infatti, l'87,5% di risposte corrette. Si riporta un protocollo che evidenzia il procedimento corretto svolto dallo studente, anche se emerge un calcolo realizzato tramite l'algoritmo in colonna che poteva essere gestito anche mentalmente.



Tra coloro che sbagliano, il 6,8% degli allievi risponde 360 minuti, attribuendo 120 minuti ad ogni ora o, forse, confondendo tale valore con l'ampiezza dell'angolo giro; il 3,5% degli allievi risponde 300 minuti, attribuendo così 100 minuti ad ogni ora, forse confondendo il sistema sessagesimale con quello decimale; solo il 2,3% degli allievi non risponde. Per approfondire il tema dell'apprendimento del concetto di tempo e delle problematiche ad esso correlate si vedano i lavori di Sandri (1996, 2002, 2008), dove vengono presentate ricerche sperimentali condotte con bambini di scuola elementare con deficit intellettivo e che possono essere utili per capire in profondità tale aspetto.

C2) Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?

Risposta: ……………………………………………………………………………………………….

Possibile risposta corretta:
20 minuti oppure 20

Risultati:

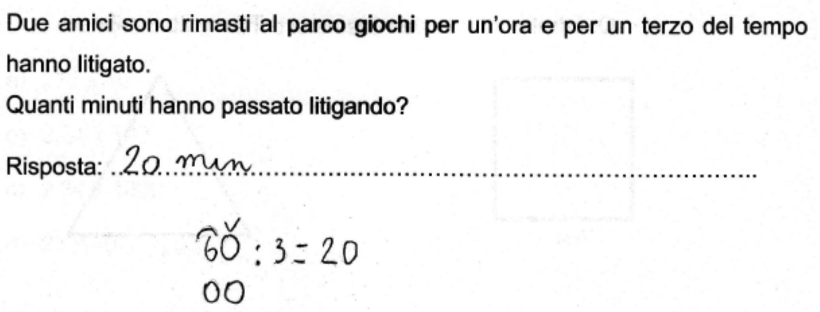
Risposta corretta	Risposte errate				Mancante/ Non valida
20 minuti	**45 minuti**	**15 minuti/ un quarto d'ora**	**30 minuti/ mezz'ora**	**Altro**	
26,2	17,8	16,6	8,7	13,9	16,8

Programmi '84:
Misure di tempo
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali: giorno, ora, minuto, secondo e loro rapporti.
Problemi
Problemi grafici o numerici, semplici, implicanti l'uso di frazioni del tipo: «3/4 di».

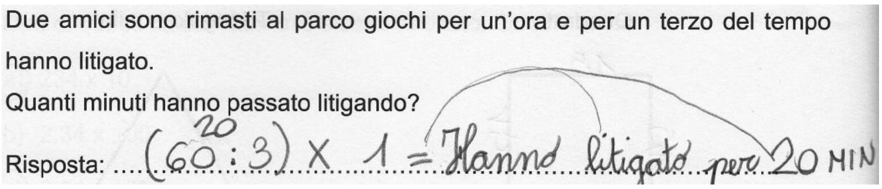
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).
L'allievo è in grado di determinare aritmeticamente frazioni delle principali grandezze.

Questo secondo quesito legato alla grandezza tempo risulta più complesso del precedente, in quanto coinvolge anche il concetto di frazione come operatore da applicare a tale grandezza in gioco. Anche dal punto di vista linguistico il testo non è facilmente comprensibile, poteva essere migliorato nella punteggiatura da inserire al posto della congiunzione "e" per favorire la comprensione. A questo quesito risponde correttamente solo il 26,2% degli allievi.

Riportiamo due esempi dove l'allievo calcola un terzo di 60 minuti:


Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: 20 min

60 : 3 = 20
00

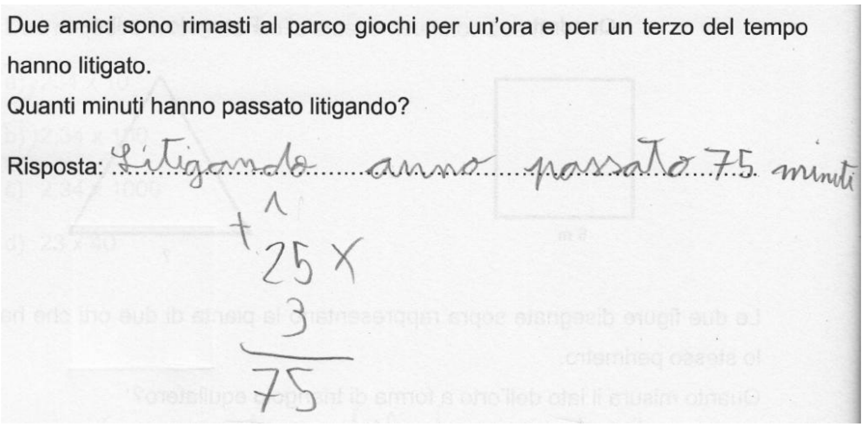

Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: (60 : 3) X 1 = Hanno litigato per 20 MIN

È interessante notare che il primo allievo esegue l'algoritmo in colonna per un calcolo che si può fare più in fretta e con coscienza a mente (Arrigo, 2014), inoltre si nota l'esigenza del secondo allievo di moltiplicare per 1 il risultato della divisione, nonostante non sia necessario, ciò deriva da una necessità di tipo procedurale e più in generale, da una clausola del contratto didattico detta di *delega formale* che consiste in questo: l'allievo legge il testo matematico, decide quale o quali sono le operazioni da effettuare e i numeri con i quali deve operare. A questo punto scatta la delega formale: non tocca più allo studente ragionare e controllare, sia che faccia il calcolo a mente, tanto più se lo fa con la calcolatrice, ma si instaura la clausola che disimpegna le facoltà razionali, critiche e di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o alla calcolatrice risolvere il problema. Il compito successivo dello studente sarà di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi (D'Amore, 1999). In questo caso l'allievo segue ciecamente il procedimento che generalmente si applica quando si deve operare con una frazione, senza pensare alla specifica situazione in gioco, che coinvolge la frazione 1/3, quindi con numeratore 1.

Anche se la comprensione della grandezza tempo non è la competenza maggiormente richiesta in questo quesito, risultano interessanti dal punto di vista didattico i seguenti riferimenti: Cazzago (1984) e Cedrini e Liberati (2005).

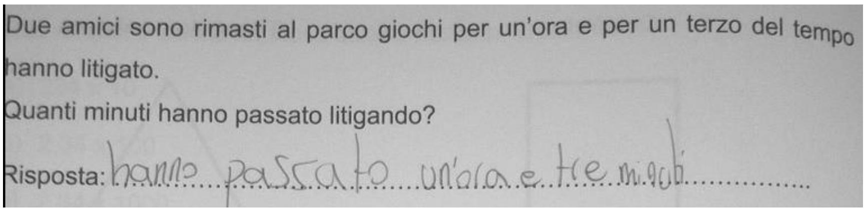
Tra coloro che rispondono in modo scorretto, il 17,8% degli allievi risponde 45 minuti, pari a 3/4 del tempo trascorso; il 16,6% risponde 15 minuti o un quarto d'ora, pari a 1/4 del tempo; l'8,7% risponde 30 minuti, pari a 1/2 del tempo. Nella categoria "Altro" sono presenti le seguenti risposte: 3 minuti e 40 minuti con l'1,4%; 10 minuti con l'1,2%; 1/3, 75 minuti, 1 ora e 30 minuti, 1 ora e 75 minuti, 80 minuti, 63 minuti con lo 0,7% (chi supera l'ora potrebbe non conoscere quanti minuti vi sono in un'ora, non aver compreso il concetto di frazione come operatore o potrebbe essere stato ingannato dall'uso della congiunzione "e" nel testo, invece di un punto).

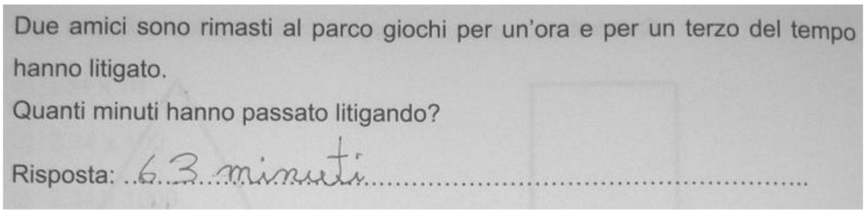
Riportiamo di seguito alcuni esempi che forniscono una risposta superiore all'ora.


Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: Litigando anno passato 75 minuti

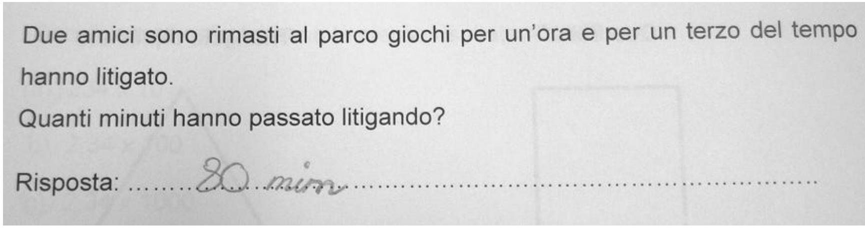
1 + 25 x 3 = 75

I seguenti protocolli evidenziano un'errata comprensione del testo, dovuta nello specifico alla presenza della congiunzione "e"; gli allievi interpretano il tempo che i due amici hanno passato a litigare pari a un'ora alla quale sommare un terzo di ora. Si continua a notare l'uso dell'algoritmo in colonna per calcoli che si potrebbero gestire a mente. Vi sono allievi che ritengono un terzo di un'ora pari a 3 minuti, come evidenziano i seguenti protocolli.

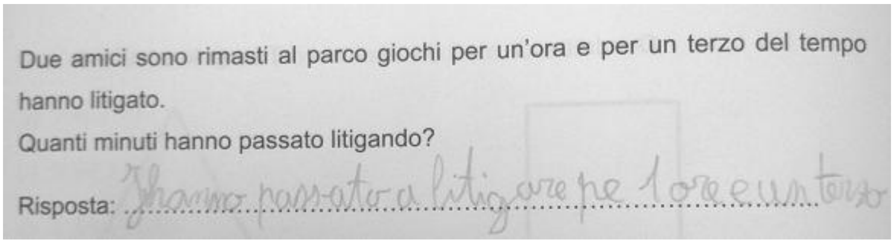

Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: hanno passato un'ora e tre minuti


Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: 63 minuti

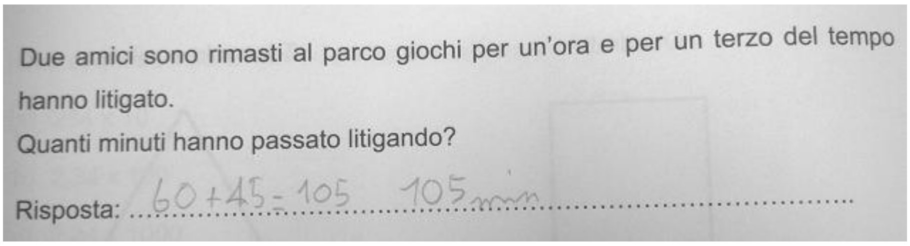
Altri allievi considerano un terzo di un'ora pari a 20 minuti e lo sommano all'ora, come nel seguente protocollo:


Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: 80 min

Altri riportano la frase "un'ora e un terzo":


Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: hanno passato a litigare pe 1 ora e un terzo

Sono inoltre presenti risposte con diversi numeri che raggiungono lo 0,3-0,4%. Riportiamo di seguito un esempio:


Due amici sono rimasti al parco giochi per un'ora e per un terzo del tempo hanno litigato.
Quanti minuti hanno passato litigando?
Risposta: 60+45=105 105 min

Va segnalato che il 16,8% degli allievi non risponde a questo quesito o risponde in modo da essere annullato; questo rappresenta il 56-esimo sui 60 quesiti somministrati per questo fascicolo.

4.2. Lunghezza

C3) Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.
Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?

Risposta: ………………………………………………………………………………

Possibile risposta corretta:
25 km oppure 25

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate			Mancante/ Non valida
25 km	**1 km**	**75 km**	**Altro**	
29,0	5,3	4,3	31,7	29,7

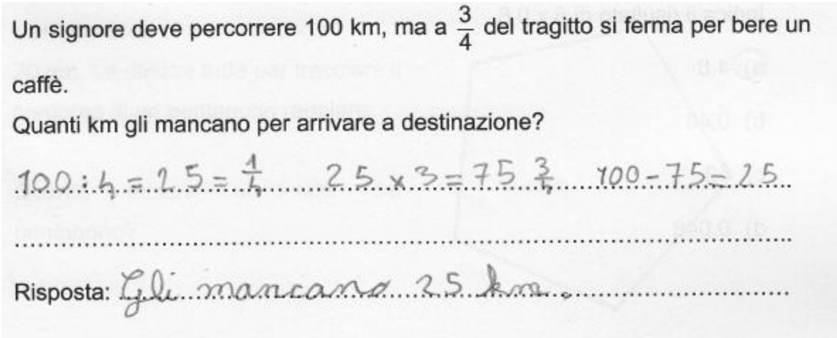
Programmi '84:
Frazioni
Frazioni equivalenti e frazioni complementari di una frazione data rispetto all'intero.
Problemi
Problemi grafici o numerici, semplici, implicanti l'uso di frazioni del tipo: «3/4 di».

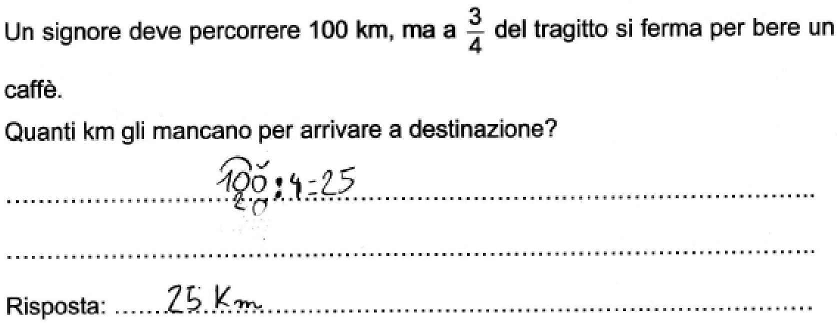
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità.
L'allievo è in grado di determinare aritmeticamente frazioni delle principali grandezze.

Il quesito coinvolge il concetto di lunghezza, ma la difficoltà maggiore è legata all'applicazione del concetto di frazione come operatore moltiplicativo da applicare a questa grandezza in gioco. Sappiamo come il concetto di frazione, solo in apparenza semplice e intuitivo, nasconda in realtà insidie nell'essere appreso da parte degli allievi (Fandiño Pinilla, 2005a). In Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla e Sbaragli (2006) viene riportato il rendiconto di un'esperienza di apprendimento e di ricerca – azione condotta da parte di un gruppo di 36 insegnanti (di scuola dell'infanzia, elementare e media) che ha consentito di mettere in atto cambi di convinzioni dal punto di vista matematico, epistemologico e didattico sul tema delle frazioni, che li ha portati a rivedere le proprie posizioni per quanto concerne la trasposizione didattica di questo argomento. Inoltre, nel testo di Campolucci, Maori e Fandiño Pinilla (2011) viene proposta, dopo una lunga parte di riflessione didattica teorica, una interessante sperimentazione molto puntuale e concreta realizzata dalla I alla V elementare sul tema delle frazioni.

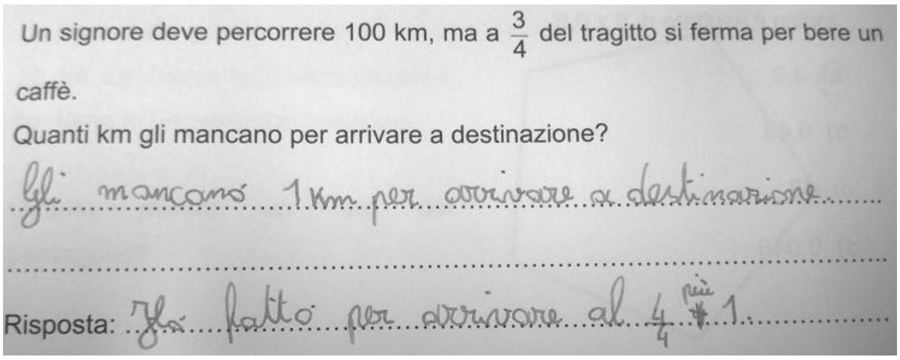
A questo quesito risponde correttamente il 29% degli allievi. Tra questi il 16,2% risponde specificando solo il risultato 25 km, l'8,2% risponde con il procedimento: 100 : 4 = 25 km e il 4,6% risponde con il procedimento 100 : 4 × 3 = 75   100 - 75 = 25 km.

Riportiamo due protocolli come esempi di risposte corrette che mostrano strategie diverse di risoluzione:

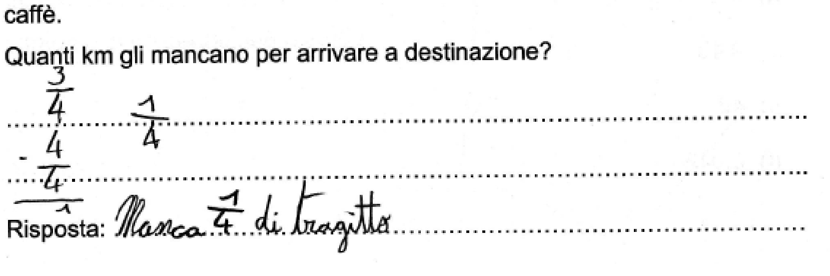

Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.
Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?
$100 : 4 = 25 = \frac{1}{4}$ $25 \times 3 = 75$ $\frac{3}{4}$ $100 - 75 = 25$
Risposta: Gli mancano 25 km.


Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.
Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?
$100 : 4 = 25$
Risposta: 25 Km

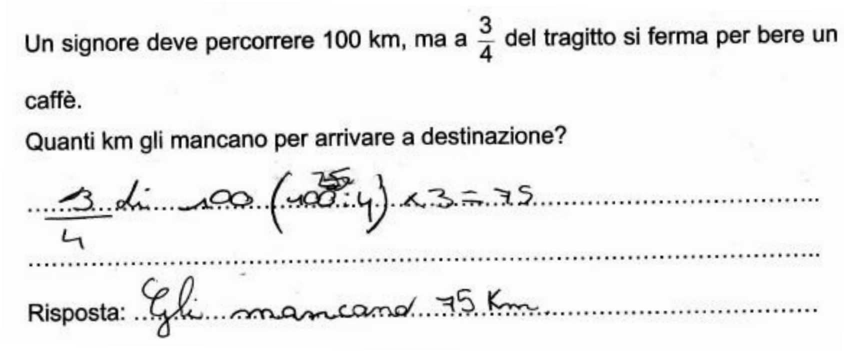
Tra coloro che rispondono in modo scorretto il 5,3% degli allievi risponde 1 km, probabilmente perché associano la frazione complementare (1/4) alla lunghezza 1 km, pensando al numeratore 1, come testimonia il seguente protocollo:


Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.
Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?
Gli mancano 1 km per arrivare a destinazione
Risposta: Ho fatto per arrivare al $\frac{4}{4}$ più 1.

Anche il seguente protocollo evidenzia una difficoltà a gestire la frazione come operatore e a comprendere linguisticamente la richiesta. Lo studente, infatti, lascia indicata la frazione, correttamente individuata, ma non indica a quanti km corrisponde come richiesto dalla domanda.


Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.
Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?
$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$
$- \frac{4}{4}$
$\frac{}{1}$
Risposta: Manca $\frac{1}{4}$ di tragitto

Il 4,3% degli allievi risponde 75 km, individuando la lunghezza percorsa dal signore e non quanto deve ancora percorrere. Questa superficialità nella lettura, derivante dal voler desumere la richiesta dalla situazione senza analizzarla attentamente, rappresenta un errore tipico comune a diversi quesiti.

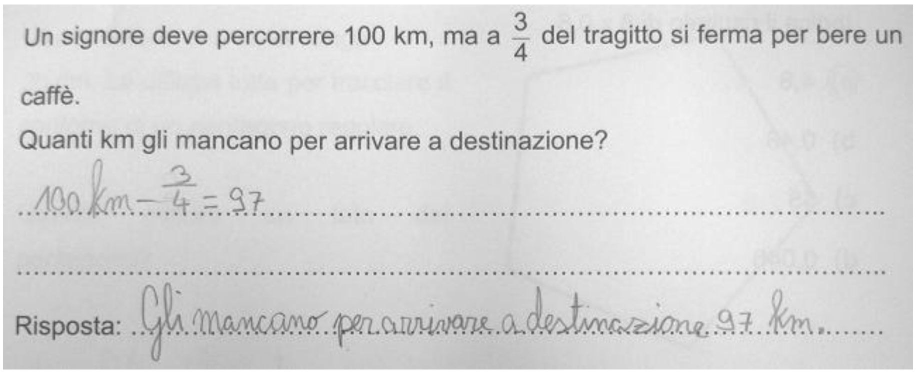

Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.

Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?

$\frac{3}{4}$ di 100 (100 : 4) x 3 = 75

Risposta: Gli mancano 75 Km

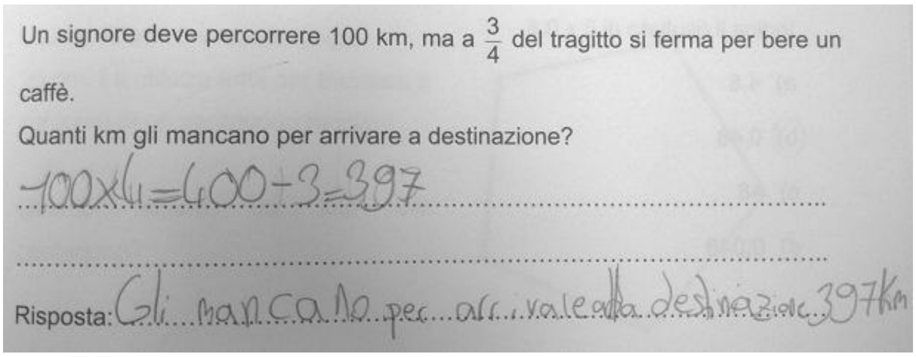
Nella categoria “Altro” rientrano le risposte 10 km e 20 km con la percentuale del 2,2%; 97 km con l’1,5% (presumibilmente derivante dalla differenza tra 100 km e 3); 1/4 data dall’1,2% degli allievi; 50 km fornita dall’1,2% degli allievi; 15 km dall’1% degli allievi e svariate risposte con percentuali pari a 0,3-0,4% (ad esempio: 76 km, 75 kg, 600 m, 700 km, 96,06 km, 65 km, 66 km, 97 km, 397 km e tante altre). I seguenti protocolli mostrano procedimenti alquanto fantasiosi, che mettono in evidenza carenze matematiche: erronee applicazioni della frazione, uso procedurale dell’uguale, …:


Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.

Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?

100 km − $\frac{3}{4}$ = 97

Risposta: Gli mancano per arrivare a destinazione 97 km

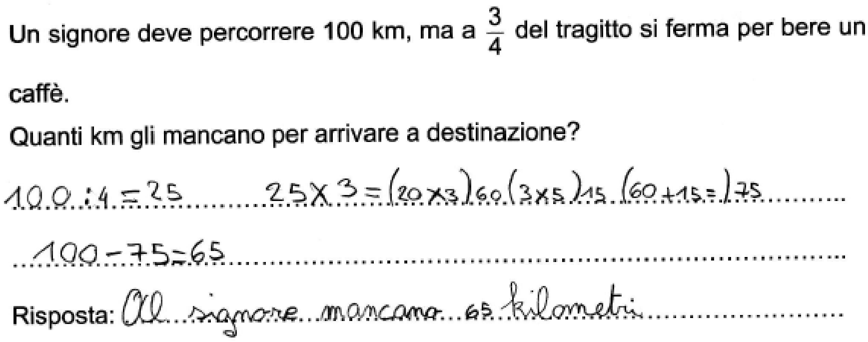

Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.

Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?

100x4=400−3=397

Risposta: Gli mancano per arrivare alla destinazione 397Km

Dall’analisi dei protocolli emergono in alcuni casi ragionamenti corretti degli allievi, ma errori di calcolo che li portano a risultati sbagliati, come testimonia il seguente protocollo.


Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.

Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?

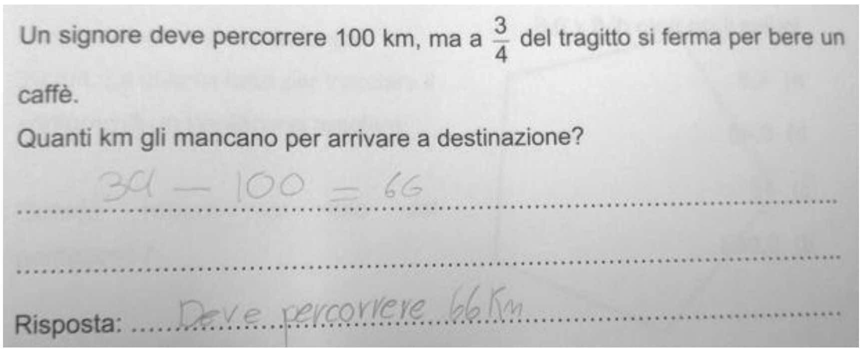
100 : 4 = 25 25 X 3 = (20 x 3) 60 (3 x 5) 15 (60 + 15 =) 75

100 − 75 = 65

Risposta: Al signore mancano 65 kilometri

La prima riga mostra che l’allievo sa applicare la proprietà distributiva, ma non la sa scrivere correttamente. Il protocollo si conclude con un errore di calcolo nella sottrazione 100 – 75.

Un altro protocollo interessante mostra una profonda lacuna dell’allievo sia relativamente al concetto frazione che alla capacità di eseguire una sottrazione. Presumibilmente l’allievo confonde la frazione $\frac{3}{4}$ con il numero 34, inoltre confonde sottraendo e minuendo.


Un signore deve percorrere 100 km, ma a $\frac{3}{4}$ del tragitto si ferma per bere un caffè.

Quanti km gli mancano per arrivare a destinazione?

34 — 100 = 66

Risposta: Deve percorrere 66 Km

Va segnalato che il 29,7% degli allievi non risponde o fornisce una risposta non valida. Questo quesito rappresenta il 47-esimo quesito dei 60 somministrati.

C4) Indica la quantità corrispondente a $\frac{1}{2}$ di 6 m.

a) 2 m
b) 3 m
c) 4 m
d) 8 m

Risposta corretta: b

Risultati:

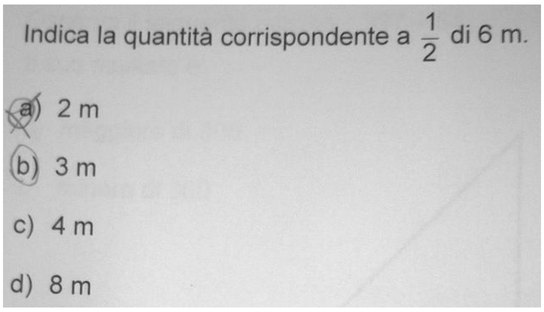
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
7,8	75,9	5,5	3,9	6,9

Programmi ’84:
Problemi
Problemi grafici o numerici, semplici, implicanti l'uso di frazioni del tipo: «3/4 di».

Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità.
L’allievo è in grado di determinare aritmeticamente frazioni delle principali grandezze.

Questo quesito pur riguardando una lunghezza è legato al concetto di metà, concetto che dovrebbe già essere assimilato fin dalla classe terza e intuito fin dalla scuola dell'infanzia (Sbaragli, 2008b).

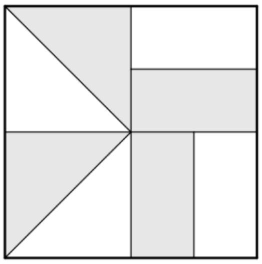
Il quesito richiede di individuare $\frac{1}{2}$ di una lunghezza pari a 6 m, quindi di applicare una frazione come operatore a una grandezza. Sul concetto di metà vi sono interessanti esperienze proposte nel testo di Campolucci, Maori e Fandiño Pinilla (2011) che possono essere proposte in continuità nei diversi cicli scolastici, mentre per quanto concerne il concetto di lunghezza in ambito didattico si consiglia il testo di Cottino et al. (2011). Benché ci si aspettava una più alta percentuale di risposte corrette, il quesito registra solo il 75,9% di successi. Probabilmente l'uso del registro frazionario nella rappresentazione della metà ha indotto alcuni allievi a fornire una risposta errata, come testimonia l'indecisione del seguente allievo che barra inizialmente 2 m, per poi correggersi e scegliere la risposta esatta.



Le risposte scorrette si distribuiscono tra le altre opzioni come segue: il 7,8% degli allievi risponde 2 m, influenzati forse dal 2 al denominatore, il 5,5% 4 m, il 3,9% 8 m e il 6,9% non risponde al quesito o fornisce una risposta non valida.

4.3. Area

C5) Indica la frazione che rappresenta la superficie colorata della seguente figura.



a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{1}{3}$

Risposta corretta: b

Risultati:

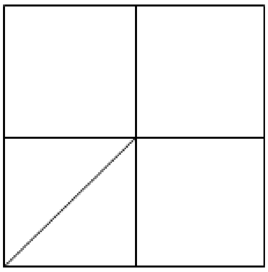
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
19,2	37,5	26,3	1,0	16,0

Programmi '84:
Misure di area
Misurazione di aree mediante unità di misura (ricoprimenti o quadrettatura).
Problemi
Problemi di misura di capacità, peso, valore, ampiezza angolare, tempo, area (casi semplici).

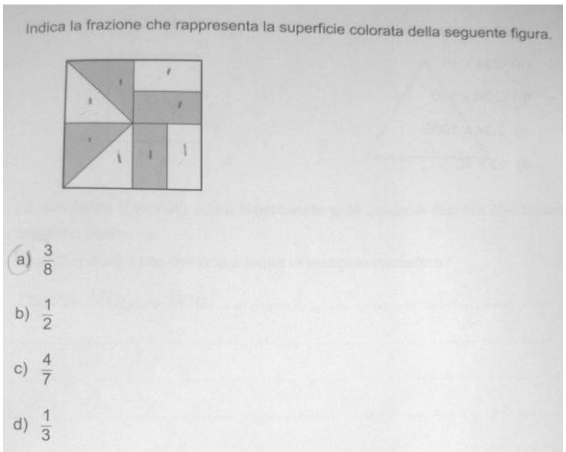
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo - Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo conosce il significato di frazione come operatore diretto, come quoziente di due numeri naturali o come rapporto fra due numeri naturali in situazioni reali.
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di determinare aritmeticamente frazioni delle principali grandezze.

Il quesito richiede di individuare la frazione espressa nel registro frazionario della superficie colorata di una figura, quindi coinvolge il concetto di frazione come parte di uno-tutto. Questa interpretazione della frazione è la prima che viene incontrata dagli allievi e proposta dagli insegnanti.

Anche se la figura è stata suddivisa in coppie di figure tra loro congruenti, soltanto il 37,5% degli allievi risponde che la parte colorata è la metà della superficie complessiva. Va ricordato che spesso la prassi didattica è basata sul definire impropriamente il frazionare come una suddivisione di un intero in parti *uguali* e la frazione come una di queste parti, non abituando così gli allievi a vedere suddivisioni che soddisfano un determinato criterio. Non è detto, infatti, che la figura debba essere divisa in parti tra loro tutte congruenti (Fandiño Pinilla, 2005a), proprio come in questo caso. Le consuete e ripetute routine didattiche (parti di una torta, piegature di un foglio, …) non sempre permettono di affrontare in modo completo questo fondamentale argomento. Vi è inoltre la prassi di privilegiare figure standard, quando si vogliono trovare frazioni in contesti continui: rettangoli, cerchi, quadrati, solo raramente triangoli. Questo fatto è assai pericoloso dal punto di vista didattico, perché genera l'idea che si possono trovare le frazioni solo di quelle figure e non di altre. Da questo punto di vista, interessante è la ricerca di Valdemoros (2004) che riporta i risultati di una ricerca effettuata su 37 allievi di 8-11 anni, dove viene presentato il caso di diversi studenti che di fronte ad un muro quadrato che deve essere diviso in 5 parti uguali tra 5 amici pittori, forniscono la seguente risposta:

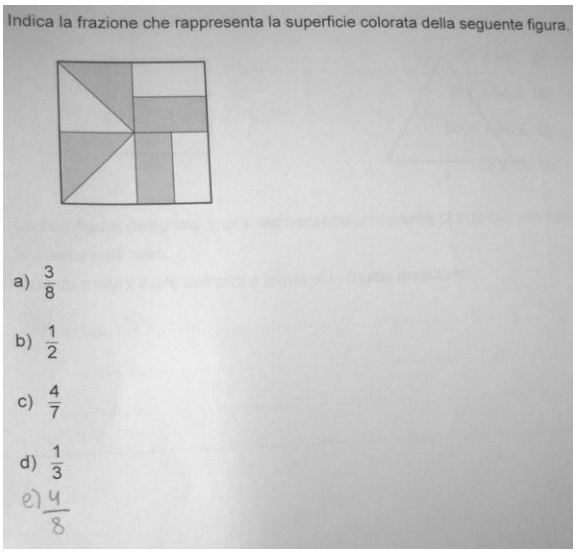


Tornando al quesito, tra coloro che sbagliano il 26,3% risponde $\frac{4}{7}$, individuando le 4 parti colorate ma non le 8 nella quale è stata suddivisa la figura; il 19,2% risponde $\frac{3}{8}$, individuando le 8 parti nelle quali è stata suddivisa la figura, ma non le 4 colorate, come evidenzia il protocollo seguente.



L'1% risponde $\frac{1}{3}$; mentre ben il 15,9% fornisce una risposta mancante o non valida. Va considerato che questo quesito rappresenta il 53-esimo dei 60 somministrati nel secondo fascicolo.

È interessante notare come alcuni allievi, le cui risposte rientrano nella tipologia Mancante/Non valida abbiano correttamente individuato le 8 parti in cui viene diviso l'intero (indicate dal denominatore) e le 4 prese in considerazione (numeratore), mai poi non sono stati in grado di trattare la frazione $\frac{4}{8}$ in modo da trasformarla in una delle 4 scelte, ossia nella frazione equivalente $\frac{1}{2}$. Gli allievi in questo caso, non trovando tra le quattro scelte quella secondo loro corretta, hanno specificato la risposta $\frac{4}{8}$, aggiungendola tra quelle proposte dal quesito, come evidenziano i seguenti due protocolli:


Indica la frazione che rappresenta la superficie colorata della seguente figura.

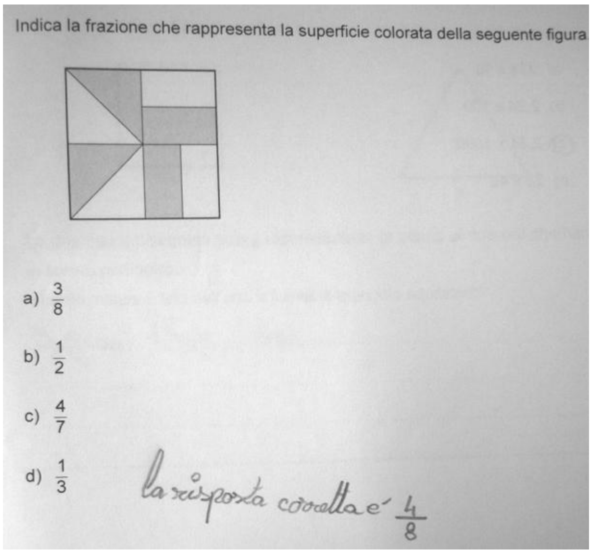
a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{4}{8}$


Indica la frazione che rappresenta la superficie colorata della seguente figura

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{1}{3}$

la risposta corretta e' $\frac{4}{8}$

Questo comportamento è indice di una difficoltà a passare da una rappresentazione ad un'altra dello stesso oggetto e in questo caso nello stesso registro (numeri frazionari). Questa trasformazione viene chiamata *trattamento* e la letteratura mostra svariati esempi di difficoltà degli allievi ad applicarla, dato che tendono a fornire sensi diversi a rappresentazioni diverse dello stesso oggetto matematico, come $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ (una parte su due viene concepita dagli allievi come diversa rispetto a quattro parti su otto) (D'Amore, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla M.I., Iori M., 2013). Come sostiene Sbaragli (2012): «Le ricerche hanno anche messo in evidenza come lo studente faccia fatica a capire il senso dell'equivalenza nei casi discreti; se abbiamo 3 palline bianche e 6 nere, possiamo dire che le bianche sono $\frac{1}{3}$ del totale delle palline; ma se abbiamo 6 bianche e 12 nere, lo studente potrebbe faticare a capire che, all'aumento evidente del numero di palline, non corrisponda anche un aumento di quel "$\frac{1}{3}$"».

Va anche segnalato il lavoro di Kamii e Clark (1995) che affronta il tema della difficoltà di capire fino in fondo che cosa significa l'equivalenza tra frazioni.

4.4. Stima

C6) Quanto può essere la lunghezza di una matita?

a) 15 mm
b) 15 cm
c) 15 dm
d) 15 m

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
3,4	94,7	1,2	0,2	0,5

Programmi ’84:
III elementare:
Misure di lunghezza
Attività di stima di lunghezze.

Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

C7) Stima quanto è lungo uno spazzolino da denti.

a) 0,18 cm
b) 1,8 cm
c) 18 cm
d) 180 cm

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
7,4	6,7	84,5	0,5	0,9

Programmi ’84:
III elementare:
Misure di lunghezza
Attività di stima di lunghezze.

Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

I due quesiti richiedono di stimare rispettivamente la lunghezza di una matita e di uno spazzolino da denti, lunghezze più o meno confrontabili tra loro. Sono diverse le definizioni e le applicazioni del concetto di stima che è possibile rintracciare in un dizionario o nella letteratura della didattica della matematica. Da quest’ultimo punto di vista, Pellegrino (1999) definisce la stima come: «il risultato di un procedimento (conscio o inconscio) che tende a individuare il valore incognito di una quantità o di una grandezza» (p. 145). Per Segovia, Castro, Rico e Castro (1989), invece, compiere una stima significa: «individuare il valore del risultato di un’operazione numerica o della misura di una quantità, in funzione della situazione individuale di chi stima» (p.18).

Una conseguenza della definizione scelta da Pellegrino è la ripartizione tra stime *dirette,* ottenute “ad occhio” o “a senso”, ed *indirette*, ricavate con il calcolo approssimato. Un’altra distinzione proposta dalla letteratura è quella tra *stima computazionale* (che si riferisce al risultato di calcoli), *stima di numerosità* (che riguarda quantità numeriche) e stima *di misurazione* (sia di grandezze continue che discrete). Nel caso di grandezze o quantità tipiche della realtà quotidiana una buona stima differisce dal valore esatto per meno del 10% (Pellegrino, 1999).

I due quesiti sono legati a stime dirette di misurazione. Nel primo sono state inserite nelle scelte multiple unità di misura diverse, mentre nel secondo quesito è stata mantenuta invariata l'unità di misura e cambiato il valore numerico. Per un approfondimento del concetto di grandezza, misura e unità di misura si veda Sbaragli (2011). Al primo quesito risponde correttamente il 94,7% degli allievi, mentre al secondo l'84,5%. I dati evidenziano una buona conoscenza di una fondamentale caratteristica degli oggetti di uso comune presentati, la lunghezza.

Tra coloro che rispondono in modo scorretto al primo quesito, il 3,4% degli allievi risponde 15 mm invece di cm, le altre due opzioni registrano percentuali simili.

Gli allievi che rispondono in modo scorretto al secondo quesito, sostengono che uno spazzolino da denti è lungo 0,18 cm (7,4%) (quindi come nel caso precedente scelgono principalmente una lunghezza minore), 1,8 cm (6,7%) e 180 cm (0,5%). Solo lo 0,9% degli allievi non risponde a questa domanda.

C8) Quanto può pesare un gatto adulto?

a) 3 kg
b) 3 g
c) 3 mg
d) 3 hg

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
82,8	4,6	2,8	8,3	1,5

Programmi '84:
III elementare:
Misure di peso e di capacità
- Esperienze con pesi e capacità e semplici relazioni tra grandezze.

IV elementare:
Misure di peso e di capacità
- Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali:
g, hg, kg; dl, L (litro) e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di stimare, misurare, confrontare e approssimare grandezze.

Anche questo quesito concerne la stima diretta di misurazione, ma questa volta applicata al concetto di massa, contestualizzata in una situazione legata al vissuto dell'allievo. Lavorare tramite la stima in classe per acquisire una certa sensibilità in tal senso, implica necessariamente partire da situazioni provenienti dalla realtà, prendendo dati reali e verosimili che permettono all'allievo di acquisire l'ordine di grandezza, con cui confrontare il risultato delle stime. La determinazione da parte dell'allievo dell'ordine di grandezza degli oggetti reali, può essere conseguita solo attraverso l'esperienza che egli ha acquisito tramite le misurazioni realizzate in maniera effettiva.

Le caratteristiche che definiscono il concetto di stima per Segovia, Castro, Rico e Castro (1989, p. 21) sono: saper dare un valore ad una quantità o al risultato di un'operazione; il soggetto che deve dare la valutazione ha informazioni, riferimenti o esperienze con la situazione da valutare; la valutazione si fa generalmente in maniera mentale; si fa velocemente, utilizzando numeri i più semplici possibili; il valore assegnato non deve essere esatto, ma abbastanza vicino per poter prendere delle decisioni; il valore assegnato può variare leggermente a seconda della persona che effettua la valutazione.

Per Pellegrino (1999, pagg. 146-147) un buon estimatore deve: essere dotato di buone capacità mentali e matematiche, anche se intuitive e spontanee; saper scegliere a intuito qual è la strada migliore per effettuare la stima; saper accettare la presenza di un errore nella sua stima, rispetto al valore esatto; saper trasformare dati numerici astratti o astrusi in qualche cosa di familiare o di interpretabile; saper usare e coordinare tra loro varie strategie di calcolo mentale.

Come si vede, in questo identikit del "buon estimatore" si mescolano fattori psicologici, metacognitivi, affettivi e competenze matematiche.

Per il tipo di situazione proposta e per la tipologia di quesito, a risposta chiusa, alcune delle caratteristiche che deve possedere un buon estimatore non sono necessarie. Il quesito ottiene un'alta percentuale di risposte corrette, l'82,8%. Tra coloro che rispondono in modo scorretto, l'8,3% risponde 3 hg, il 4,6% 3 g, mentre il 2,8% 3 mg. Solo l'1,5% degli allievi non risponde al quesito.

4.5. Convertire unità di misura di lunghezze

C9) Completa:
127 cm = ………. m

Risposta corretta:
1,27

Risultati:

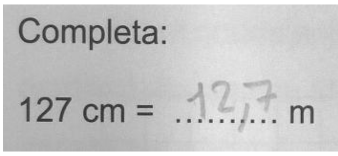
Risposta corretta	Risposte errate						Mancante/ Non valida
1,27	**12,7**	**1270**	**12700**	**1**	**127**	**Altro**	
63,9	7,8	4,7	3,7	2,9	1,4	8,4	7,2

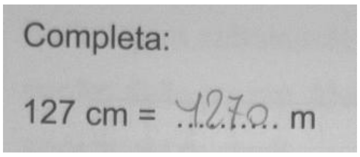
Programmi '84:
Misure di lunghezza
Applicazione dei numeri decimali alle misure di lunghezza.

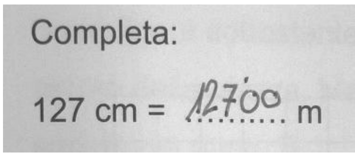
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

Nel quesito viene proposta una conversione di unità di misura di lunghezze da centimetri a metri. La *misura* rappresenta un tema di primaria importanza nelle scienze sperimentali e nell'àmbito della matematica, dato che permette di comprendere come si passa da un fenomeno del mondo reale alle grandezze numeriche che lo descrivono. Tale tema è di grande ampiezza e varietà. Maria del Carmen Chamorro (1997), in accordo con le idee e gli studi di Guy Brousseau, ha evidenziato l'esistenza di otto aspetti distinti che determinano gli intorni di apprendimento per quanto concerne la misura, essi sono: oggetto supporto, grandezza, valore particolare (o quantità di grandezza), applicazione misura, misura immagine, misura concreta, misurazione, ordine di grandezza. Questo dettagliato e sottile elenco mette in evidenza la complessità del processo di misura, specie per quanto concerne il suo apprendimento. In Chamorro (2001-2002) vengono analizzate esperienze realizzate nella scuola elementare a proposito del problema dell'insegnamento-apprendimento della misura. Lo scopo di questo studio è di contribuire alla realizzazione di sapienti situazioni a-didattiche e ingegnerie tese a eliminare o almeno a contenere le ben note difficoltà di apprendimento.

La percentuale di risposte corrette è del 63,9%. Tra coloro che sbagliano il 7,8% degli allievi risponde 12,7; il 4,7% risponde 1270; il 3,7% risponde 12700; il 2,9% risponde 1; mentre l'1,4% risponde 127, mettendo in evidenza i tipici errori che si riscontrano nelle conversioni. Di seguito riportiamo alcuni protocolli:

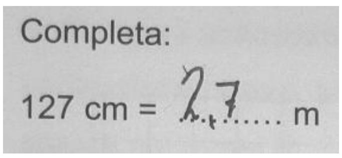

Completa:
127 cm = 12,7 m

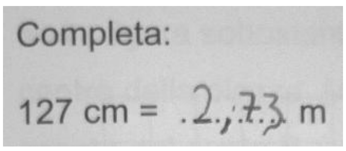

Completa:
127 cm = 1270 m

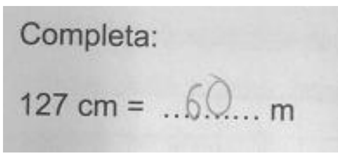

Completa:
127 cm = 12700 m

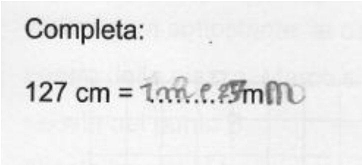
Nella categoria "Altro" rientrano le seguenti risposte: 0,127 e 12 (1,4%), 27 (1,2%), 1027 (0,5%), altre risposte varie 0,2-0,3%.

Di seguito si riportano alcuni protocolli a mo' di esempio:


Completa:
127 cm = 2,7 m


Completa:
127 cm = 2,73 m


Completa:
127 cm = 60 m



Nel protocollo qui a fianco l'allievo effettua la scomposizione di 127 cm, ma invece di scrivere 1 m e 27 cm, scrive 1 m e 27 mm. Per fornire la risposta attesa, l'allievo avrebbe dovuto concludere il ragionamento arrivando a dire che 1 m e 27 cm = 1,27 m.

Il 7,2% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

C10) Indica la misura corrispondente a 0,321 m.

a) 3,21 cm
b) 32,1 cm
c) 321 cm
d) 3210 cm

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
22,6	37,4	23,9	9,1	7,0

Programmi '84:
Misure di lunghezza
Applicazione dei numeri decimali alle misure di lunghezza.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

C11) Indica la misura corrispondente a 0,401 m.

a) 4,01 cm
b) 40,1 cm
c) 401 cm
d) 4010 cm

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
19,2	37,9	26,2	10,1	6,6

Programmi '84:
Misure di lunghezza
Applicazione dei numeri decimali alle misure di lunghezza.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

In questi due quesiti analoghi si richiede la conversione inversa rispetto al quesito C9), ossia di passare da una lunghezza espressa in metri ad una in cm. Per risolvere con competenza tali quesiti, occorre che gli allievi abbiano compreso il concetto di lunghezza, e più in generale di grandezza. Per un approfondimento di questi aspetti si veda Sbaragli (2011).

I due quesiti sono costruiti in modo identico: conversione da m a cm, la misura proposta è un numero decimale con le stesse caratteristiche (stesso numero di cifre decimali e stessa parte intera), i distrattori sono distribuiti in ordine crescente. Ci sembra dunque inutile l'inserimento di entrambi i quesiti nel fascicolo. Le risposte fornite dai bambini sono, infatti, confrontabili: al primo risponde in modo corretto solo il 37,4% degli allievi. Tra coloro che sbagliano il 22,6% degli allievi risponde 3,21 cm, il 23,9% risponde 321 cm e il 9,1% risponde 3210 cm. Il 7% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare. Percentuali paragonabili si ottengono dal secondo, sia per quanto concerne le percentuali di risposte corrette: il 37,9% degli allievi, sia per quanto concerne le tipologie di errore. Il 19,2% gli allievi che sbaglia risponde 4,01 cm, il 26,2% risponde 401 cm e il 10,1% risponde 4010 cm, mostrando coerenza nella scelta delle risposte. In questo quesito il 6,6% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

C12) Completa:
2,8 m + ………. cm = 3 m

Risposta corretta:
20

Risultati:

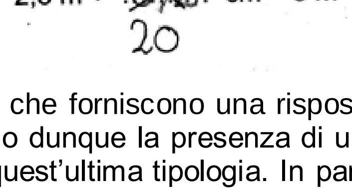
Risposta corretta	Risposte errate				Mancante/ Non valida
20	**2**	**0,2**	**200**	**Altro**	
22,6	23,0	19,2	3,7	16,7	14,8

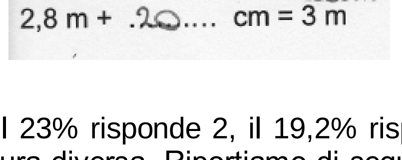
Programmi ’84:
Misure di lunghezza
Applicazione dei numeri decimali alle misure di lunghezza.
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; anche con l’impiego di numeri decimali, limitatamente alle prime tre operazioni.

Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all’altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.
L’allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).

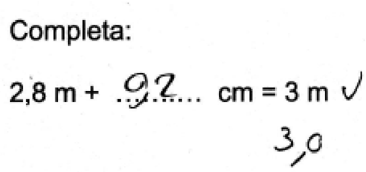
Il quesito chiede di trovare quel numero espresso in cm che sommato a 2,8 m dà come risultato 3 m. Richiede quindi di effettuare conversioni di unità di misura all’interno di un’operazione aritmetica. A questo complesso quesito risponde correttamente solo il 22,6% degli allievi. Risultati di questo tipo suggeriscono l’esigenza didattica di collegare le richieste legate all’ambito “Grandezze e misure” alle conoscenze sui numeri e sulle operazioni.

Riportiamo due esempi di risposte corrette: il primo allievo inizialmente sbaglia riportando la misura che si avrebbe se non si dovessero considerare le unità di misura e poi fornisce la risposta corretta ritrattando la prima intuizione; il secondo mostra il procedimento seguito per rispondere correttamente, ossia esprime tutte le lunghezze da sommare in cm:



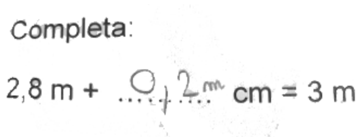


Tra coloro che forniscono una risposta scorretta: il 23% risponde 2, il 19,2% risponde 0,2, trascurando dunque la presenza di un’unità di misura diversa. Riportiamo di seguito due esempi di quest’ultima tipologia. In particolare, nel secondo protocollo l’allievo scrive una misura con l’unità di misura corretta, tuttavia sbaglia in quanto il quesito richiedeva la trasformazione in cm.


Completa:

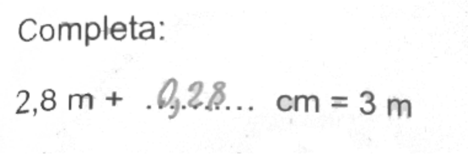
2,8 m + ..92... cm = 3 m ✓

3,0


Completa:

2,8 m + ...9,2 m... cm = 3 m

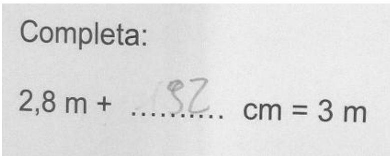
Nel seguente protocollo l'alunno dimostra di non aver compreso la consegna, in quanto tenta di trasformare la grandezza 2,8 m in cm, commettendo peraltro un errore.


Completa:

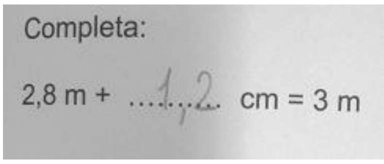
2,8 m + .0,28... cm = 3 m

Il 3,7% risponde 200, mentre nella categoria "Altro" vi sono le seguenti risposte: 1,2 con l'1,7%, 92 con l'1,4%, 28 con l'1%, 0,02, 1, 5,8, 7,2, 8,2 e 280 con lo 0,7%, altre risposte diverse con lo 0,2-0,3%.

Si riportano di seguito due protocolli come esempio:


Completa:

2,8 m + ...92.... cm = 3 m


Completa:

2,8 m + ...1,2 cm = 3 m

Va segnalato che il 14,8% degli allievi non risponde alla domanda o fornisce una risposta da annullare; questo quesito rappresenta il 59-esimo dei 60 somministrati nel secondo fascicolo, quindi il fattore tempo o stanchezza possono aver influenzato il risultato.

C13) Un metro di corda costa 40 centesimi.
Quanto costa 1 dam di quella corda?

a) 40 centesimi
b) 40 Fr
c) 41 centesimi
d) 4 Fr

Risposta corretta: d

Risultati:

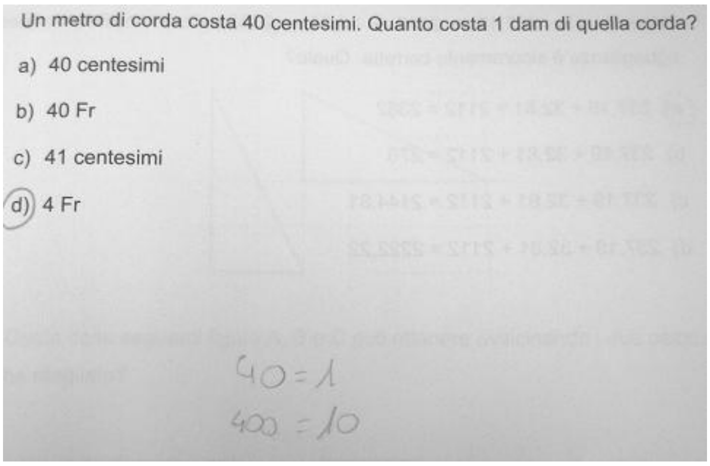
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
4,1	12,8	9,4	67,1	6,6

Programmi '84:
Misure di lunghezza
Ampliamento del sistema di unità di misura convenzionali (dam, hm).
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; anche con l'impiego di numeri decimali, limitatamente alle prime tre operazioni.

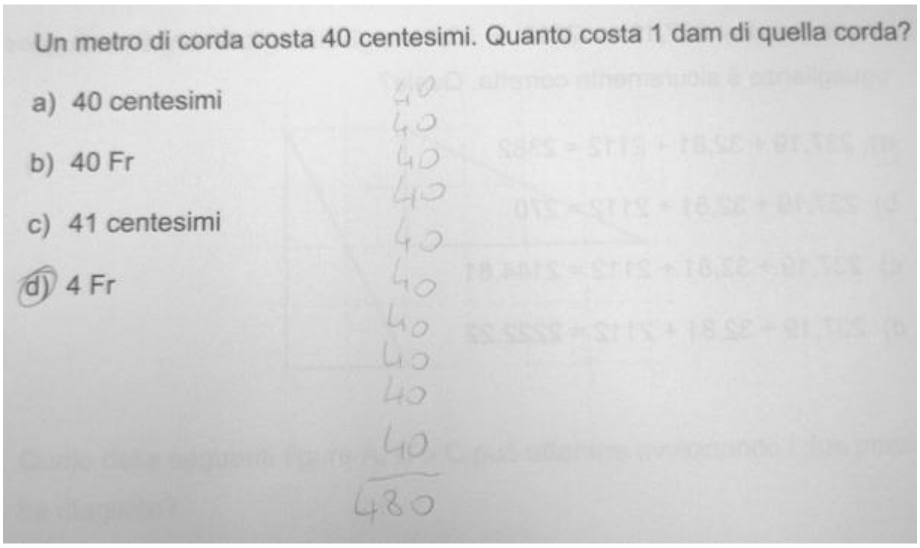
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

Il quesito si basa su un problema la cui risoluzione concerne la conoscenza del sistema monetario, delle unità di misura di lunghezza e le conversioni tra unità di misura. Il testo prevede anche alcune trasformazioni dal registro verbale al registro numerico ("Un metro", "1 dam", "40 centesimi"), che sembrano non aver creato grandi difficoltà agli alunni. Da questo punto di vista, interessanti situazioni da proporre dalla prima alla quinta elementare sono rintracciabili in Cottino et al. (2011). A questo quesito rispondono in modo corretto il 67,1% degli allievi. Di seguito riportiamo alcuni protocolli significativi.

Nel seguente protocollo l'allievo approccia una possibile proporzione (40 centesimi : 1 m = 400 centesimi : 10 m).



Nel seguente caso invece l'allievo risolve il quesito "esplorando e tentando". Nonostante il valore riportato in fondo al protocollo (480) sia sbagliato l'allievo intuisce la risposta corretta.



Tra coloro che forniscono una risposta scorretta: il 12,8% risponde 40 Fr. il 9,4% risponde 41 centesimi, probabilmente sommando i valori numerici presenti nel testo e il 4,1% degli allievi lascia inalterato il prezzo. Il 6,6% degli allievi non fornisce una risposta o la fornisce in modo da essere annullata.

C14) La scuola di Monica si trova a 1 km da casa sua.
Monica ha già percorso $\frac{1}{10}$ del suo tragitto.
Quanti metri deve ancora percorrere?

a) 9 m
b) 1000 m
c) 100 m
d) 900 m

Risposta corretta: d

Risultati:

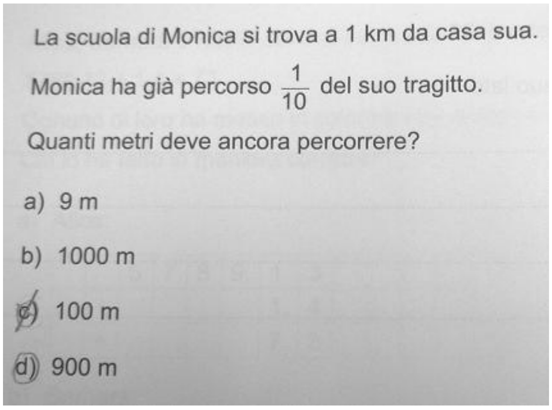
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
19,7	3,9	16,7	54,4	5,3

Programmi ’84:
Frazioni
Frazioni equivalenti e frazioni complementari di una frazione data rispetto all'intero.
Problemi
Problemi grafici o numerici, semplici, implicanti l'uso di frazioni del tipo: «3/4 di».

Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L’allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all’altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.
L’allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).
L’allievo è in grado di determinare aritmeticamente frazioni delle principali grandezze.

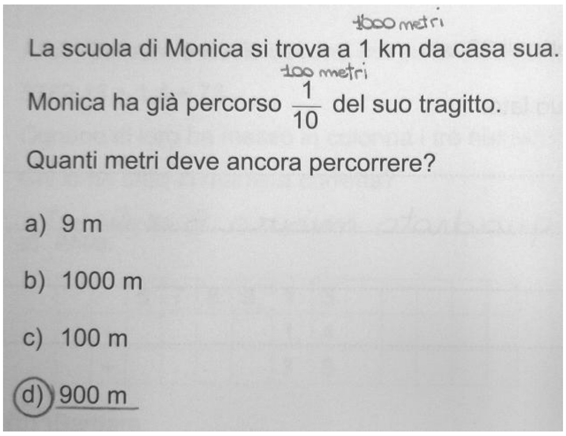
Il quesito propone un problema la cui risoluzione comporta la conoscenza della frazione come operatore moltiplicativo e una conversione delle unità di misura di lunghezza. Per una interessante raccolta ragionata di vari problemi si veda Marazzani (2011). Risponde correttamente il 54,4% degli allievi.

Di seguito riportiamo un protocollo che testimonia un ripensamento dell’allievo dovuto ad un probabile fraintendimento fra tragitto già percorso e tragitto ancora da percorrere:


La scuola di Monica si trova a 1 km da casa sua.
Monica ha già percorso $\frac{1}{10}$ del suo tragitto.
Quanti metri deve ancora percorrere?

a) 9 m
b) 1000 m
~~c)~~ 100 m
d) 900 m

Nel seguente protocollo invece l’allievo fa trasparire il ragionamento seguito per trovare la soluzione del quesito: egli converte 1 km in 1000 m, precisa che 1/10 del tragitto percorso equivale a 100 m e di conseguenza sceglie la quarta opzione.



1000 metri

La scuola di Monica si trova a 1 km da casa sua.

100 metri

Monica ha già percorso $\frac{1}{10}$ del suo tragitto.

Quanti metri deve ancora percorrere?

a) 9 m

b) 1000 m

c) 100 m

d) 900 m

Tra coloro che sbagliano il 19,7% risponde 9 m, forse perché è la prima scelta tra le risposte chiuse, che generalmente è la più scelta da chi non sa la risposta, o perché derivante dalla differenza tra 10 e 1; il 16,7% risponde 100 m, pensando al percorso effettuato e non a quello rimanente come chiede la domanda. Il 3,9% risponde 1000 m, quindi riferendosi all'intera distanza scuola-casa. Il 5,3% degli allievi non risponde al quesito o fornisce una risposta da annullare.

4.6. Convertire unità di misura di massa

C15) Indica la misura corrispondente a 0,03 kg.

a) 3 g
b) 30 g
c) 300 g
d) 3000 g

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
37,4	38,3	12,2	7,5	4,6

Programmi '84:
Misure di peso e di capacità
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali: g, hg, kg; dl, l (litro) e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

C16) Indica la misura corrispondente a 0,7 kg.

a) 7 g
b) 70 g
c) 700 g
d) 7000 g

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
23,2	23,3	39,5	8,7	5,3

Programmi '84:
Misure di peso e di capacità
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali: g, hg, kg; dl, l (litro) e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

Questi due quesiti sono analoghi ai quesiti C10) e C11) che chiedevano di effettuare le conversioni di unità di misura di lunghezze. Anche i risultati sono paragonabili a quelli ottenuti nei quesiti precedenti, in effetti al primo risponde correttamente il 38,3% degli allievi. Tra coloro che rispondono in modo scorretto il 37,4% degli allievi risponde 3 g, il 12,2% risponde 300 g e il 7,5% risponde 3000 g. Il 4,6% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare. Al secondo quesito risponde correttamente il 39,5% degli allievi. Tra coloro che forniscono una risposta scorretta, il 23,3% risponde 70 g, il 23,2% risponde 7 g, l'8,7% risponde 7000 g e il 5,3% non risponde o fornisce una risposta da annullare.

Anche in questo caso notiamo una ripetizione nella struttura dei due quesiti, che risultano molto simili.

C17) Un grammo che parte è di un chilogrammo?

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{100}$

c) $\frac{1}{1000}$

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
20,4	21,4	49,7	8,5

Programmi '84:
Misure di peso e di capacità
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali:g, hg, kg; dl, l (litro) e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.
L'allievo è in grado di determinare aritmeticamente frazioni delle principali grandezze.

Questo quesito a risposta chiusa, comporta la scelta di tre risposte possibili espresse in forma frazionaria per individuare che parte è un grammo del chilogrammo. Si chiede quindi di individuare la frazione parte di un tutto o di saper individuare il rapporto che c'è tra un grammo e un chilogrammo. In Hunting e Davis (1991) viene messa in evidenza la relazione tra l'idea di rapporto e il primo apprendimento delle frazioni, suggerendo di sviluppare una didattica dei due concetti all'unisono fin dall'inizio. A questo quesito risponde correttamente solo il 49,7% degli allievi. Le altre due opzioni vengono scelte indicativamente dallo stesso numero di studenti: il 21,4% degli allievi sceglie $\frac{1}{100}$ e il 20,4% $\frac{1}{10}$. L'8,5% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

4.7. Convertire unità di misura di capacità

C18) 6 dl + 568 l = …
Indica il risultato corretto.

a) 574 l
b) 568,6 l
c) 6,568 dl
d) 656,8 dl

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
26,3	57,3	6,3	3,3	6,8

Programmi '84:
Misure di peso e di capacità
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali: g, hg, kg; dl, l (litro) e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).

Il quesito chiede di completare un'espressione aritmetica che coinvolge anche conversioni di unità di misura. In particolare, chiede di trovare la somma degli addendi: 6 dl e 568 l. Ad esso risponde correttamente il 57,3% degli allievi. Tra coloro che sbagliano il 26,3% risponde 574 l, ossia somma 6 dl a 568 l, senza accorgersi che si tratta di due unità di misura distinte o, pur accorgendosi, non sentendo la necessità di effettuare conversioni. L'allievo tende a calcolare il risultato dell'addizione trattando i numeri come se non fossero grandezze. L'assegnazione di un numero ad una grandezza come risultato di un'operazione di misura comporta sia la scelta di una unità di misura, sia l'espressione della grandezza con un numero seguito dall'unità di misura utilizzata. In riferimento ad una specifica grandezza è dunque auspicabile precisare sempre l'unità di misura, perché in caso contrario il numero in sé non ha alcun significato. Il 6,3% degli allievi risponde 6,568 dl, ossia considera 568 l pari a 0,568 dl e il 3,3% degli allievi risponde 656,8 dl. Il 6,8% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

C19) A quanti dl corrispondono 1,5 litri?

a) 0,15 dl
b) 150 dl
c) 15 dl
d) 0,015 dl

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
16,4	21,3	58,3	0,8	3,2

Programmi '84:
Misure di peso e di capacità
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali:g, hg, kg; dl, l (litro) e loro rapporti.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.

Il quesito richiede di convertire una grandezza da litri a decilitri. Ad esso risponde correttamente il 58,3% degli allievi. Tra coloro che sbagliano, il 21,3% risponde 150 dl, il 16,4% risponde 0,15 dl, lo 0,8% risponde 0,015 dl e 3,2% non risponde o fornisce una risposta da annullare. Come testimoniano questi risultati le prestazioni degli allievi nelle conversioni sono piuttosto carenti.

C20) In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?

Risposta: ……………………………………………………………………………

Possibile risposta corretta:
7 dl o misure equivalenti

Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata					Mancante/ Non valida
7 dl o misure equivalenti	**Procedimento sbagliato e risultato corretto Es: *1,5 - 8 = 7* *Sono stati bevuti 7 decilitri di succo***	**0,7dl**	**7 oppure 0,7 senza udm**	**Procedimento corretto e risultato sbagliato Es: *1,5-0,8=0,7* *Sono stati bevuti 0,7 decilitri di succo***	**Altro**	19,1
39,9	3,4	3,2	2,9	2,0	29,5	

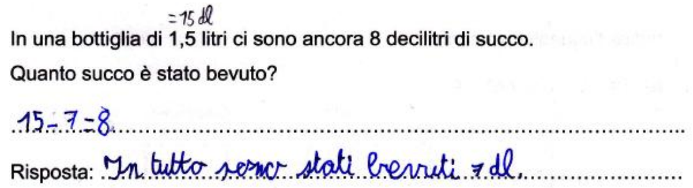
Programmi '84:
Misure di peso e di capacità
Introduzione delle seguenti unità di misura convenzionali: g, hg, kg; dl, l (litro) e loro rapporti.
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

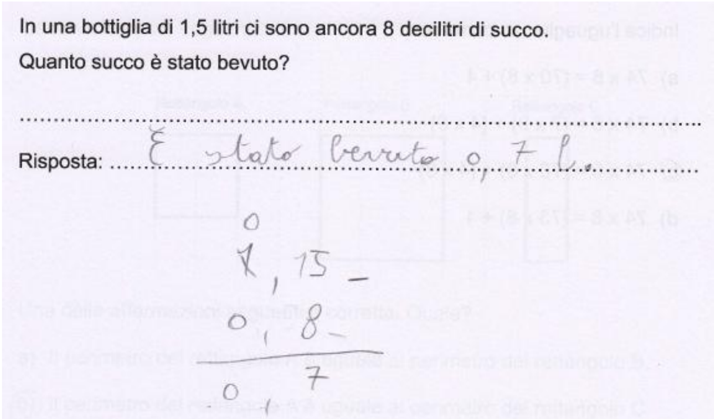
N Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Eseguire, applicare
L'allievo è in grado di convertire unità di misura, passando da una all'altra, limitatamente a quelle di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario nazionale.
L'allievo è in grado di eseguire calcoli con le misure delle grandezze principali (denaro, lunghezze, aree, massa, tempo, capacità).

Il quesito chiede di individuare quanto succo è stato bevuto tenendo conto di quanto è rimasto, lasciando implicito che la bottiglia era inizialmente piena di succo. Si richiede inoltre di prestare attenzione alle unità di misura e dunque operare una conversione prima di effettuare la sottrazione.

A questo quesito risponde correttamente il 39,9% degli allievi. Di questi, il 23,2% indica solo la risposta corretta 7 dl oppure 0,7 l e il 16,7% indica anche un procedimento corretto come ad esempio: 15 dl - 8 dl = 7 dl oppure 1,5 l - 0,8 l = 0,7 l.

Riportiamo di seguito alcuni esempi:

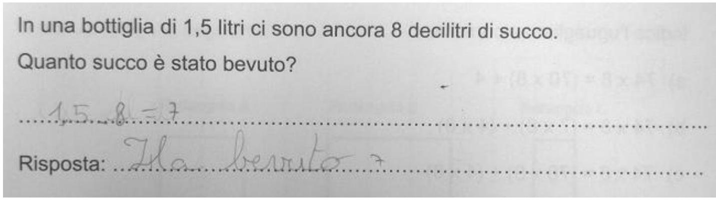

=15 dl
In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
15-7=8
Risposta: In tutto sono stati bevuti 7 dl.


In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?

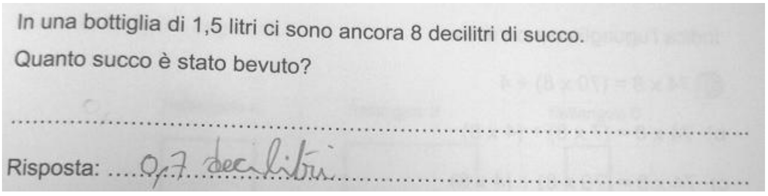
Risposta: È stato bevuto 0,7 l.

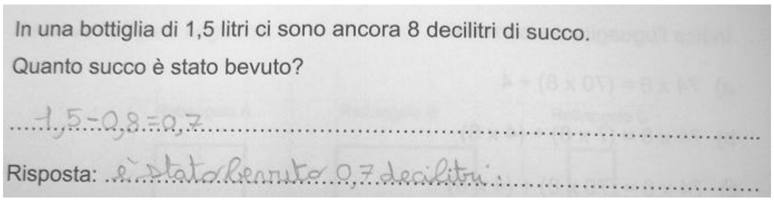
Una parte degli allievi sembra non avere alcun “senso delle misure”, né avverte l’importanza di indicarne l’unità di misura in quanto non le specifica nel risultato finale, oppure effettua la sottrazione senza tenerne conto.

Tra coloro che sbagliano il 2,9% degli allievi risponde 7 o 0,7 senza indicare l’unità di misura:


In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
1,5 - 8 = 7
Risposta: Ha bevuto 7

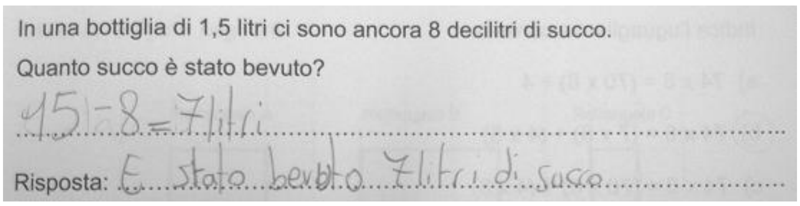
Il 3,2% risponde 0,7 dl, specificando o meno anche il procedimento.


In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
Risposta: 0,7 decilitri

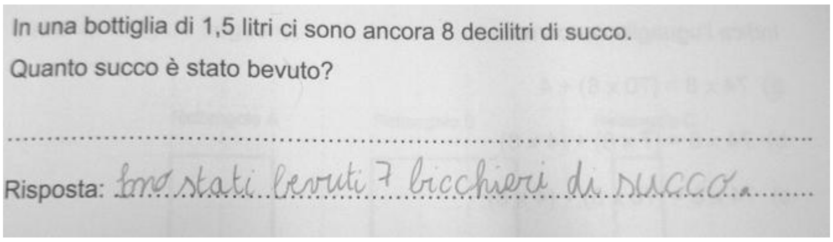

In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
1,5 - 0,8 = 0,7
Risposta: è stato bevuto 0,7 decilitri.

Il 3,4% sbaglia il procedimento ma indica il risultato corretto, il 2% riporta un procedimento corretto e un risultato sbagliato.

Nella categoria “Altro” rientrano le seguenti risposte: 2 dl l’1,7%; 1,5 dl l’1,5%; 2,5 dl l’1,2%; 2,3 l l’1%, tante altre risposte 0,2-0,3%. Va inoltre osservato che circa il 5% degli allievi sbaglia procedimento e risultato. Uno degli errori tipici è scrivere “1,5 - 8 = 0,7. È stato bevuto 0,7 dl di succo”, oppure “15 - 8 = 7. È stato bevuto 7 l di succo”.

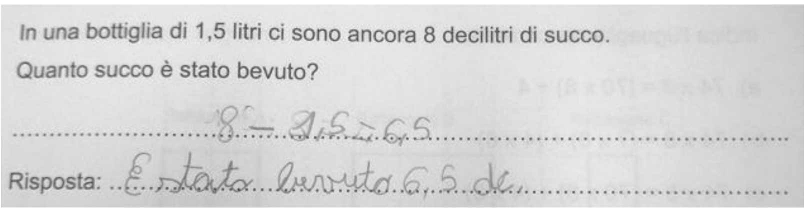

In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
15 - 8 = 7 litri
Risposta: È stato bevuto 7 litri di succo

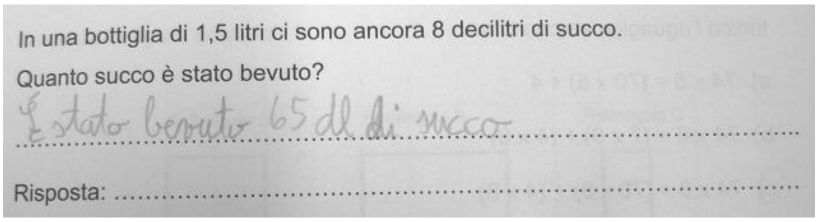
Nel seguente protocollo l’allievo riporta 7 come risultato, ma intendendo i bicchieri di succo e non i decilitri.


In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?

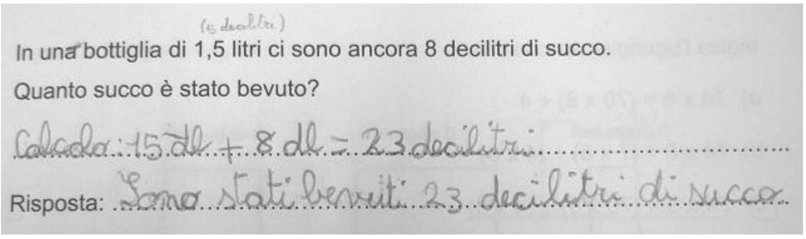
Risposta: Sono stati bevuti 7 bicchieri di succo.

Nel seguente protocollo invece l’allievo non si accorge delle diverse unità di misura con cui sono espresse le capacità e quindi opera una sottrazione considerando come minuendo il numero più grande che appare nel testo 8. Ne deriva un risultato sbagliato.


In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
8 − 1,5 = 6,5
Risposta: È stato bevuto 6,5 dc.


In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
È stato bevuto 65 dl di succo
Risposta:

Nel seguente protocollo l’allievo opera in modo corretto le conversioni, ma sbaglia il procedimento di risoluzione del problema.


(15 decilitri)
In una bottiglia di 1,5 litri ci sono ancora 8 decilitri di succo.
Quanto succo è stato bevuto?
Calcolo: 15 dl + 8 dl = 23 decilitri
Risposta: Sono stati bevuti 23 decilitri di succo

Va segnalato che il 19,1% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

In generale, questo ambito è risultato piuttosto debole: non appena le domande si allontanano da una pratica scolastica standard di conversioni, i risultati degli allievi calano. Inoltre si evidenzia una carente capacità di utilizzare correttamente le unità di misura o di capirne l’importanza. Ci si può chiedere se non sia più importante, a questo livello scolastico, creare situazioni impregnate di senso sui concetti di grandezza, misura e unità di misura, invece di fare esercitare su conversioni tra unità di misura e su concetti ancora non ben costruiti.

5. Numeri e calcolo – Eseguire e applicare

L'ambito "Numeri e calcolo", aspetto di competenza: "Eseguire e applicare", è stato suddiviso nelle seguenti tematiche: addizione e sue proprietà (3 quesiti), sottrazione (2 quesiti), moltiplicazione e sue proprietà (7 quesiti), divisione (4 quesiti), stima risultati di calcoli (3 quesiti), uguaglianza (1 quesito). I 20 quesiti sono così suddivisi: 13 a risposta chiusa e 7 a risposta aperta univoca. Tra i quesiti a risposta chiusa 1 è formulato fornendo 2 sole opzioni di risposta, 1 con 3 e 11 con 4; scelta quest'ultima che riteniamo più idonea per quesiti a risposta chiusa.

Nelle tabelle 1-2 sono riportate le risposte ai 20 quesiti, con l'indicazione delle percentuali ottenute, suddivise per tipologia: risposta chiusa, aperta univoca o aperta articolata. Sono state evidenziate le risposte corrette. Il testo di ciascun quesito con le relative percentuali di riuscita, l'individuazione della tematica relativa ai quesiti nei Programmi del 1984 e nel nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e il relativo commento didattico sono presentate di seguito. Le percentuali riportate nelle seguenti tabelle sono state calcolate in base ai risultati dell'intera popolazione di allievi (2935), alla quale sono stati somministrati i fascicoli. Per l'analisi dei protocolli e delle risposte date ai soli quesiti a risposta aperta univoca o articolata è stato selezionato un campione significativo di 414 studenti. Le percentuali riportate nelle tabelle a fianco di ciascuno dei quesiti sono state calcolate sul suddetto campione.

• Quesiti a risposta chiusa

Domanda	Risposte (%)				Mancante/ Non valida (%)
	a	b	c	d	
D1	1,0	2,2	95,6	0,6	0,6
D2	20,3	72,5	3,4		3,8
D3	84,0	2,7	4,9	2,7	5,7
D5	78,9	8,5	8,0	1,7	2,9
D7	2,7	3,5	6,2	83,9	3,7
D8	43,1	10,5	10,6	27,5	8,3
D9	28,4	13,7	33,8	12,1	12,0
D10	11,5	18,0	58,6	2,4	9,5
D11	44,0	33,3	11,7	3,3	7,7
D16	18,7	26,2	32,6	4,8	17,7
D17	1,2	11,6	62,5	19,4	5,3
D18	6,5	37,9	16,5	31,7	7,4
D19	90,8	8,8			0,4

• Quesiti a risposta aperta univoca

Domanda	Risposta corretta (%)	Risposta errata (%)	Mancante/ Non valida (%)
D4	85,1	11,9	3,0
D6	87,1	8,8	4,1
D12	28,2	58,6	13,2
D13	89,8	5,7	4,5
D14	73,3	15,3	11,4
D15	48,5	32,5	19,0
D20	42,1	47,1	10,8

Tabella 1-2: Risposte alle diverse tipologie di quesiti

5.1. Addizione e sue proprietà

D1) Indica il risultato di 1000 + 700 + 9

a) 179
b) 1079
c) 1709
d) 10007009

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
1,0	2,2	95,6	0,6	0,6

Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

Il quesito richiede di effettuare la somma di tre addendi senza esplicitare la strategia risolutiva, ma l'intento degli autori era evidentemente di farla eseguire mentalmente. L'addizione è un'operazione che viene introdotta fin dalla prima elementare e che continua ad essere esercitata in ogni classe. Come era prevedibile, a questo quesito risponde correttamente il 95,6% degli allievi. Tra coloro che non rispondono in modo corretto si evincono difficoltà a gestire il sistema posizionale: il 2,2% risponde 1079 confondendo la posizione della cifra 7, inserita al posto delle decine invece che delle centinaia, l'1% risponde 179 sbagliando il valore delle cifre coinvolte nell'addizione, mentre lo 0,6% si è lasciato ingannare dall'accostamento una di seguito all'altra delle cifre dei numeri indicati nel testo. Quasi tutti gli allievi hanno risposto a questa domanda, infatti si è ottenuto solo lo 0,6% di risposte mancanti o non valide, d'altronde era anche uno dei primi quesiti del secondo fascicolo.

D2) Alice, Barbara e Kevin devono eseguire il seguente calcolo:
5789,13 + 1,4 + 73
Ognuno di loro ha messo in colonna i tre numeri in una maniera diversa. Chi lo ha fatto in maniera corretta?

a) Alice:

		5	7	8	9,	1	3					
	+					1,	4					
	+					7	3					

b) Barbara:

		5	7	8	9,	1	3					
	+				1,	4						
	+			7	3							

c) Kevin:

		5	7	8	9,	1	3					
	+	1,	4									
	+	7	3									

Risposta corretta: b

Risultati:

a	**b**	**c**	**Mancante/ Non valida**
20,3	72,5	3,4	3,8

Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo, applicandole anche all'estensione del campo numerico oltre il migliaio e ai numeri con la virgola.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

Il quesito vuole valutare la capacità dell'allievo di eseguire in modo corretto l'algoritmo scritto in colonna dell'addizione con numeri decimali. Sul ruolo dell'apprendimento algoritmico dal punto di vista didattico si veda l'interessante testo di Fandiño Pinilla (2008) dove vengono anche proposti diversi algoritmi che si sono susseguiti nella storia della matematica; l'essere umano ha tentato con tutti i mezzi a sua disposizione di effettuare calcoli in modo rapido e corretto fin dalla più remota antichità. Per quanto concerne questo specifico quesito, riteniamo che sarebbe stato più interessante chiedere all'allievo di effettuare tale addizione senza imporre la strategia risolutiva, così da consentire agli allievi di eseguire il procedimento a loro più congeniale e strategie più flessibili e creative. Il posto da accordare a scuola ai diversi modi di calcolare deve essere oggi ridefinito e precisato, va soprattutto stabilito ciò che dev'essere automatizzato da ciò che si realizza con un trattamento ragionato (*calcul réfléchi*) (Éduscol, 2007). La tendenza attuale è di andare verso il calcolo ragionato, ossia il calcolo mentale con i supporti della scrittura algebrica e di metodi schematici che evidenziano l'aspetto concettuale (Arrigo, 2014). Un apprendimento di questo modo di calcolare può sostituire quello degli algoritmi arabici (o calcolo in colonna), sostituendo l'apprendimento mnemonico di algoritmi rigidi con tecniche flessibili che lasciano più spazio alla creatività. Come sostiene Arrigo in Baldazzi et al. (2011): «l'addizione in colonna può (forse) rivelarsi più veloce, però col calcolo in riga si guadagna negli aspetti concettuale (imperniato sulla scomposizione polinomiale dei numeri) e strategico (scelta del percorso additivo); inoltre non vi è la difficoltà di ricordare i riporti».

In particolare, il passaggio dall'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri razionali, espressi in forma decimale, crea spesso difficoltà anche nell'ambito dell'esecuzione di un calcolo scritto, anzi a volte è addirittura amplificato, in quanto si deve considerare il valore posizionale delle cifre e, da questo punto di vista, l'incolonnamento non sempre aiuta. In effetti vi sono algoritmi che creano modelli che funzionano per certi tipi di numeri, ma non per altri.

Il 72,5% degli allievi risponde correttamente a questo quesito, circa il 20% in meno rispetto alle risposte corrette date al quesito D1), a testimonianza della difficoltà di saper gestire l'addizione in questo insieme numerico. Tra coloro che forniscono risposte errate, il 20,3% sceglie la prima opzione, sbagliando a incolonnare le cifre, senza dunque rispettare il loro valore posizionale, ma probabilmente facendo riferimento alla tecnica imparata nell'ambito dei numeri naturali dove si incolonna a partire da destra. Sembra quindi che gli allievi applichino tecniche viste in un contesto diverso, trascurando il fatto che nel nuovo insieme numerico non sempre funzionano. Analogo a questo esempio è il seguente riportato da Stavy e Tirosh (2000): «In Matematica, alcune proprietà spesso funzionano per sistemi fino a un certo numero, ma crollano quando la realtà dei numeri si fa più estesa. Ad esempio, quando confrontiamo due numeri naturali mediante la linea dei numeri, si potrebbe affermare che il numero più lontano dallo zero sia il numero più grande. Quando viene applicata ai numeri relativi, tuttavia, questa regola può spingerci, non correttamente, a stabilire, ad esempio, che – 5 è più grande di – 2 perché "esso è più lontano dallo zero". La regola "il più lontano-il più grande" è valida per tutti i numeri naturali, ma non per quelli relativi». Per ulteriori esempi di misconcezioni dovute all'ampliamento del sistema numerico si veda (Martini, Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2012).

Il 3,4% degli allievi risponde c), incolonnando tutte le cifre a partire da sinistra, mentre il 3,8% non risponde o produce una risposta non valida.

In generale, dal punto di vista didattico a parte la padronanza e l'uso appropriato delle operazioni, è bene dare importanza a situazioni nelle quali la gestione degli algoritmi non sia meramente esecutiva, ma stimoli un'attività di analisi e di scelta strategica.

D3) Sapendo che 237,19 + 2112 + 32,81 = 2382, allora un'altra di queste uguaglianze è sicuramente corretta. Quale?

a) 237,19 + 32,81 + 2112 = 2382
b) 237,19 + 32,81 + 2112 = 270
c) 237,19 + 32,81 + 2112 = 2144,81
d) 237,19 + 32,81 + 2112 = 2222,22

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
84,0	2,7	4,9	2,7	5,7

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Il quesito non richiede l'esecuzione dell'addizione, bensì l'applicazione delle proprietà commutativa e associativa. I risultati mettono in evidenza una buona conoscenza dei bambini di queste proprietà dell'addizione, infatti l'84% risponde correttamente. Il secondo e terzo distrattore sono costruiti in modo da riportare come risultato la somma rispettivamente dei primi due addendi e degli ultimi due addendi. Gli allievi che scelgono queste opzioni sono il 2,7% per la risposta b) e il 4,9% per la risposta c). Inoltre il 2,7% degli allievi risponde d) che fornisce un risultato sbagliato all'addizione iniziale. Il 5,7% degli allievi non risponde o fornisce una risposta non valida.

5.2. Sottrazione

D4) Esegui in colonna il calcolo 486 – 468

Possibile risposta corretta:

486 -
468 =

18

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate		Mancante/ Non valida
Risultato corretto	**Risultato sbagliato**	**Altro**	
89,3	8,0	0,7	2,0

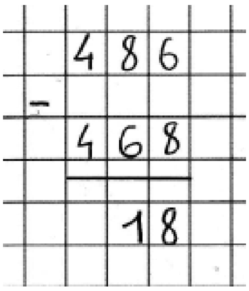
Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

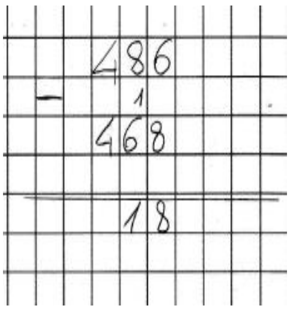
Il quesito richiede l'esecuzione di una sottrazione tra numeri naturali effettuando l'algoritmo scritto in colonna. Visto il tipo di sottrazione coinvolta, poteva essere lasciata libera la strategia risolutiva o proposta l'esecuzione del calcolo mentale. I risultati ottenuti sono buoni, infatti, l'89,3% di allievi risponde in modo esatto.

Tra le risposte corrette individuiamo 5 tipologie diverse di gestione dell'algoritmo più convenzionale in Ticino, di cui si riportano le percentuali di scelta:

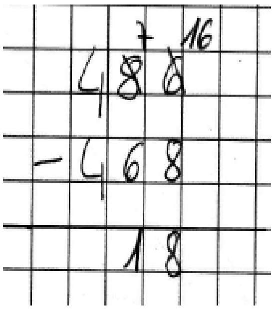
14%



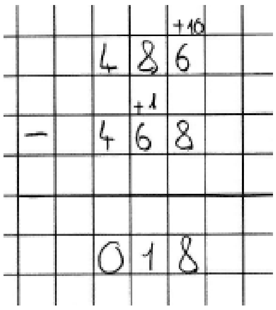
7%



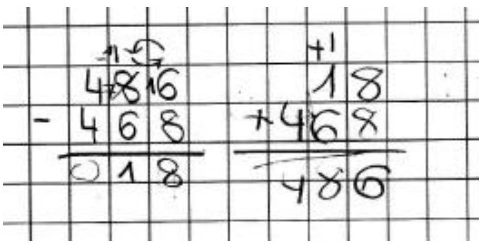
54,4%



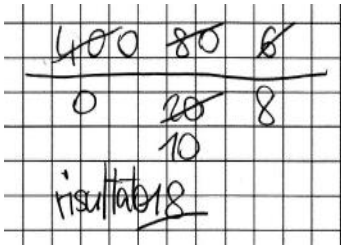
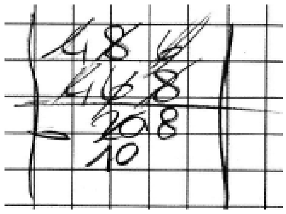
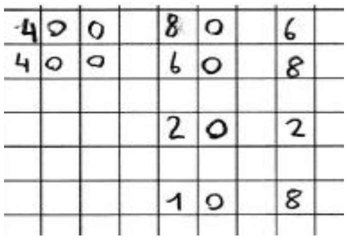
11,6%



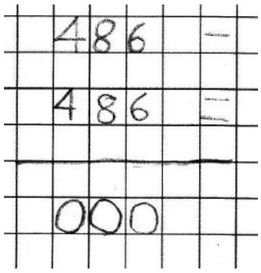
1,5 %



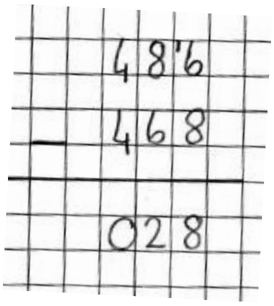
Inoltre si riportano alcuni protocolli di risposte corrette che mostrano l'enorme varietà di algoritmi scritti scelti dagli allievi. La varietà semiotica e strategica che ne emerge mette in evidenza la necessità didattica di non proporre scelte univoche imposte, che risultano a volte distanti dallo stile dell'allievo.

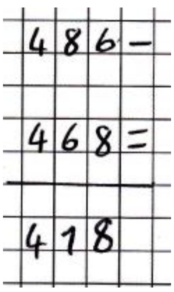
Tra le risposte sbagliate emergono i seguenti errori: l'1,2% degli allievi risponde 0, confondendo probabilmente le cifre del sottraendo. Riportiamo di seguito un esempio di protocollo.

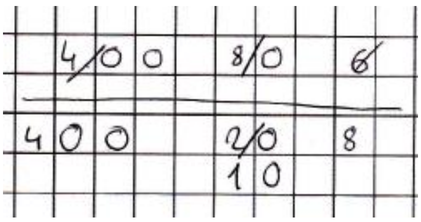


L'1,2% degli allievi risponde 28, dimenticando il "prestito", come testimonia il seguente protocollo:



L'1,2% degli allievi risponde 418, dimenticando di sottrarre le centinaia. Si riportano alcuni protocolli come esempio:





La categoria “Altro” comprende risposte incomplete pari allo 0,7% degli allievi, dove il bambino non conclude il calcolo o non lo esegue affatto. Infine, il 2% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

D5) Indica il risultato del calcolo: 9000 – 3782

a) 5218
b) 5328
c) 6782
d) 12782

Risposta corretta: a

Risultati:

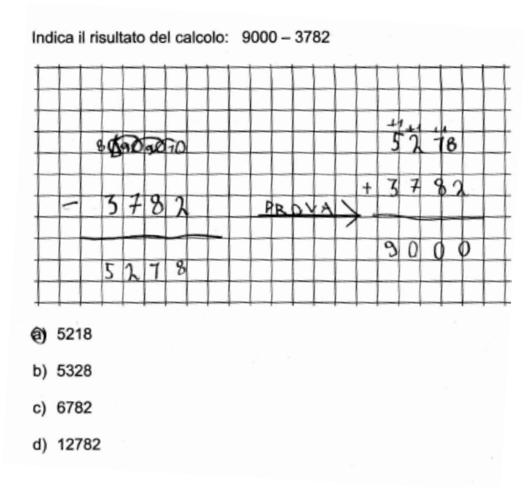
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
78,9	8,5	8,0	1,7	2,9

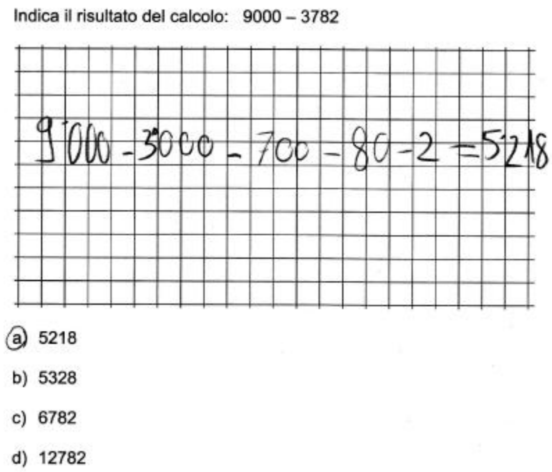
Programmi ’84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo, applicandole anche all’estensione del campo numerico oltre il migliaio e ai numeri con la virgola.

Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L’allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

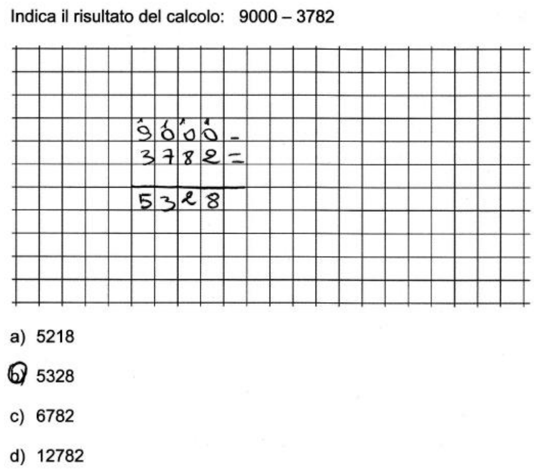
Il quesito è analogo al precedente D4), si richiede cioè il risultato di una sottrazione tra numeri naturali. In questo caso però la domanda è formulata in modo chiuso con quattro possibili scelte. L’allievo però ha a disposizione lo spazio necessario per eseguire il calcolo con la strategia che reputa più opportuna. Come era prevedibile, vista la tipologia di quesito, i risultati sono soddisfacenti, il 78,9% degli allievi sceglie l’opzione corretta, seguendo strategie di calcolo differenti: scritto in colonna, mentale-scritto, con o senza prova. Da questo punto di vista, l’individuo che ha sviluppato un buon senso del numero si aspetta naturalmente che i risultati siano plausibili rispetto a quelli attesi, ricorrendo a strategie di “checks and balances” (Reys, Reys, Emanuelsson, Johansson, McIntosh, Yang, 1999). La fase di monitoraggio, del resto, non può ridursi alla semplice verifica della correttezza del risultato di un calcolo esatto, per esempio con la prova mediante operazione inversa (Alajmi, Reys, 2010), né tantomeno con la semplice ripetizione del calcolo con lo stesso metodo scelto inizialmente (McIntosh, Reys, Reys, 1992).

Di seguito si riportano alcuni protocolli:



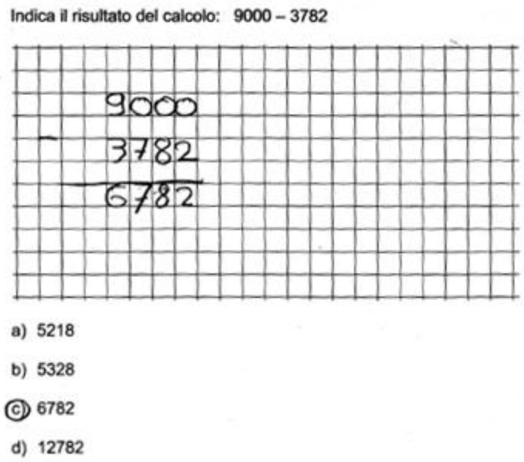


Si noti che nonostante il quesito sia simile al precedente, si registra una differenza del 10% circa di successi, presumibilmente a causa della presenza dei diversi zeri nel minuendo. In effetti, gli allievi che sbagliano rispondendo b) (8,5% del totale) non gestiscono in modo corretto i "prestiti" successivi come testimonia il seguente protocollo:



L'8% dei bambini risponde 6782 evidenziando un errore tipico che si riscontra negli allievi di scuola elementare: "in ogni colonna si sottrae sempre la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione". In questo esempio l'allievo ha eseguito erroneamente le seguenti sottrazioni:

9 – 3 = 6, 7 – 0 = 7, 8 – 0 = 8, 2 – 0 = 2.



Questa rappresenta una misconcezione tipica rilevata in letteratura. A tal proposito Zan (2002) riferendosi alle ricerche di Brown e Burton (1978), riporta il seguente classico esempio relativo alla sottrazione:

«Un bug[7] piuttosto tipico si può riscontrare nello svolgimento delle seguenti operazioni:

278-	352-	406-	543-	510-	1023-
135=	146=	219=	367=	238=	835=
143	214	213	224	328	1812

L'errore è sistematico e appare una *modificazione plausibile della procedura standard*: "in ogni colonna si sottrae *sempre* la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione".

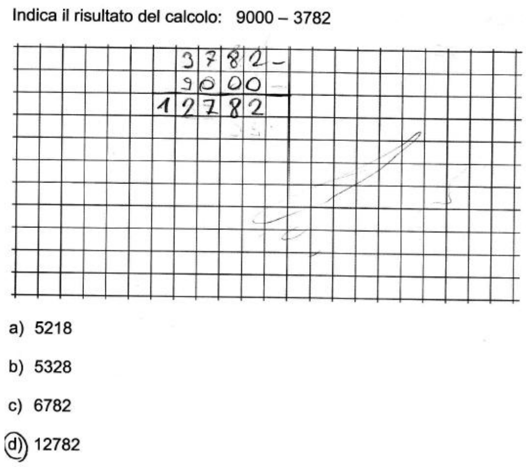
Secondo Brown e Burton spesso il comportamento generale descritto deriva dal bisogno del bambino di controllare situazioni percepite come nuove: egli comincia con i casi che già conosce, facendone modifiche plausibili. In questo senso il bambino si comporta come uno scienziato, anche se, a differenza dello scienziato, egli non è consapevole di generalizzare, ma, soprattutto, generalizza in base a caratteristiche superficiali e non ai significati». Si percepisce in questo esempio una interpretazione non del tutto negativa del comportamento del bambino; egli, sì, commette un errore sistematico, ma questo deriva da una conoscenza che, in precedenti situazioni, si è rivelata efficace.

Qui si presenta la vasta ed interessante problematica del curricolo nascosto: lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica *correttamente* regole *scorrette*. Anche in Schoenfeld (1985) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure. Spesso, all'origine di questo fatto

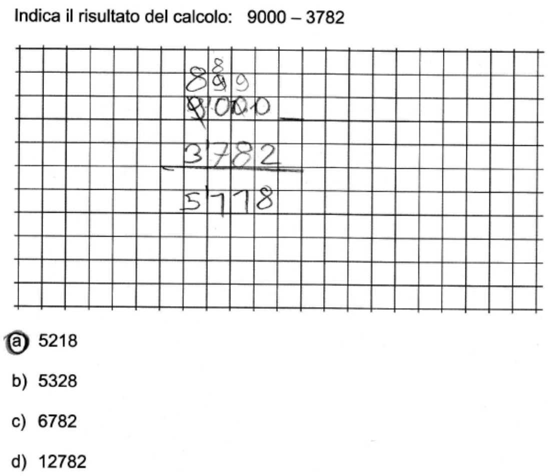
[7] In Brown e Burton gli errori sistematici vengono chiamati *bugs.*

c’è una mancata comprensione o un’errata interpretazione. Se l’insegnante non si rende conto di ciò, le sue sollecitazioni cadono a vuoto perché lo studente ha già incluso nel proprio curricolo quelle regole che ritiene corrette e che, in taluni casi, hanno funzionato (Martini, Sbaragli, 2005).

Tornando ai risultati del quesito, l’1,7% sceglie l’opzione d) confondendo la sottrazione con l’addizione: 9000 + 3782 = 12782.



La possibilità di analizzare i protocolli degli allievi permette di capire non solo cosa i bambini sbagliano, ma perché sbagliano. Infatti in alcuni casi l’allievo risponde in modo corretto ma la sua esecuzione rivela una mancata comprensione dell’algoritmo, come si vede dal seguente protocollo.



5.3. Moltiplicazione e sue proprietà

D6) Completa correttamente:
5768 × ..… = 5768

Risposta corretta:
1

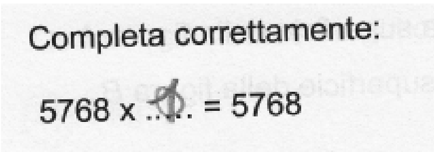
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate		Mancante/ Non valida
1	**0**	**Altro**	
89,3	6,5	1,0	3,2

Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione:
• ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni;
• relazione tra moltiplicazione e divisione. (Ad esempio: operatori diretti e inversi, catene di operatori, analisi della tavola di moltiplicazione e di divisione; diverso ruolo dello zero e dell'uno, ecc.); (…).

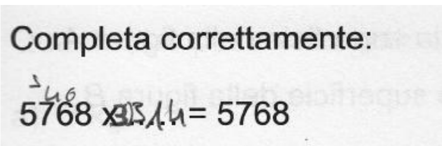
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

Il quesito vuole indagare la conoscenza degli allievi dell'elemento neutro della moltiplicazione, ossia di quel numero che moltiplicato per un qualsiasi altro non ne modifica il valore, l'1 (n × 1 = n e 1 × n = n). I risultati sono buoni: l'89,3% dei bambini trova correttamente il valore richiesto, mentre il 6,5% indica lo 0, confondendo probabilmente l'elemento neutro della moltiplicazione con quello dell'addizione.



Nel protocollo qui a fianco l'allievo mostra un'indecisione tra i numeri 0 e 1, decidendo poi di confermare la risposta corretta.

La categoria "Altro" comprende risposte di vario tipo con percentuali molto basse, dello 0,2-0,3% (3, 8, 9, 1156, 30314) per un totale dell'1%. Il 3,2% non risponde o fornisce una risposta non valida.



In questo protocollo l'allievo dimostra non solo di non aver compreso la consegna, ma di non saper eseguire la moltiplicazione tra numeri con più cifre. Infatti, l'allievo completa inserendo il prodotto di 5768 per se stesso, ma inventando un suo proprio algoritmo. Dal risultato sembra che abbia calcolato in ordine il prodotto tra le cifre: 8 × 8, 6 × 6, 7 × 7, 5 × 5, rispettando il riporto.

Si nota quindi una grande creatività dell'allievo non sostenuta da aspetti concettuali. Questo protocollo mette in evidenza come nello strutturare graficamente i quesiti sia importante lasciare molto spazio per la soluzione, per evitare che gli allievi intuiscano la risposta da tale implicita informazione e che venga così bloccata la convinzione e creatività dell'allievo.

D7) Sapendo che 7 × 11 × 13 = 1001, indica il risultato di 11 × 7 × 13.

a) 77
b) 91
c) 143
d) 1001

Risposta corretta: d

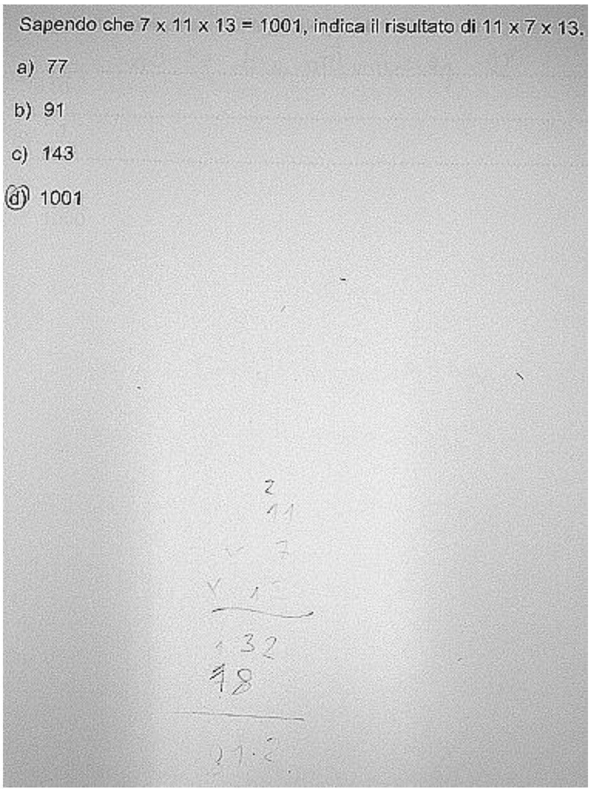
Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
2,7	3,5	6,2	83,9	3,7

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Il quesito chiede di stabilire il risultato della moltiplicazione, senza effettuare i calcoli, ma applicando le proprietà commutativa e associativa, tra l'altro solo i primi due fattori sono scambiati di posto. Di seguito riportiamo un protocollo di risposta corretta in cui però l'allievo avverte l'esigenza di calcolare il prodotto dei numeri nel nuovo ordine. Poiché la risposta data è corretta nonostante l'esecuzione errata della moltiplicazione in colonna (cancellata) possiamo supporre che l'allievo si sia accorto solo in un secondo momento che i fattori erano gli stessi rispetto alla prima moltiplicazione e che avrebbe potuto applicare le proprietà citate.


Sapendo che 7 x 11 x 13 = 1001, indica il risultato di 11 x 7 x 13.
a) 77
b) 91
c) 143
d) 1001

Al quesito risponde in modo corretto l'83,9% degli allievi, il 6,2% risponde 143, moltiplicando cioè 11 × 13, il 3,5% segna 91 che si ottiene da 7 × 13, il 2,7% risponde 77, cioè 7 × 11. Il 3,7% degli alunni non fornisce alcuna risposta o ne indica una non valida.

D8) 28 × 14 dà un risultato minore di 28 × 15. Di quanto sarà minore?

a) 28
b) 15
c) 14
d) 1

Risposta corretta: a

Risultati:

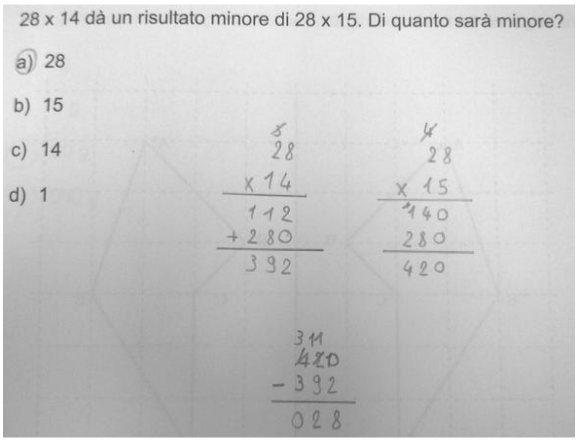
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
43,1	10,5	10,6	27,5	8,3

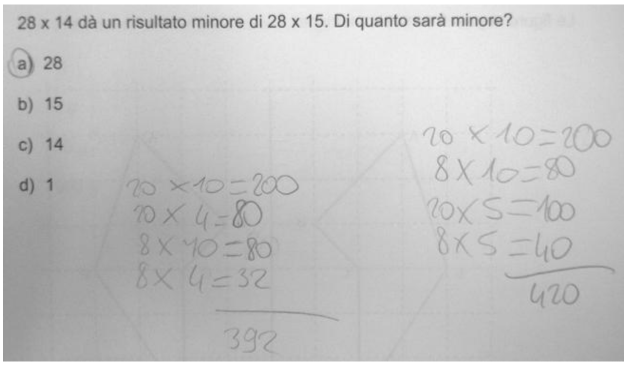
Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo. (…)
Tecnica della moltiplicazione
con moltiplicatore di due cifre ad esempio 158 × 23 = ...; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Se nei due quesiti precedenti D6) e D7) relativi alla moltiplicazione, gli allievi non hanno avuto particolari difficoltà ad applicare le proprietà più comuni, in questo caso la percentuale di successi si dimezza. Il quesito chiede di valutare la differenza tra i risultati di due moltiplicazioni, dove varia un solo fattore. Gli alunni potrebbero calcolare il risultato delle due moltiplicazioni e poi sottrarre, anche se il vero "*question intent*" della domanda è valutare la capacità di applicare la definizione e le proprietà di questa operazione. Il 43,1% degli studenti risponde in modo corretto. Per un'interessante raccolta di numerose attività già sperimentate dalla prima alla quinta elementare in ambito numerico, si veda Baldazzi et al. (2011).

Di seguito riportiamo due protocolli con risposte corrette dove emergono i procedimenti seguiti dagli allievi per rispondere al quesito. In entrambi sono presenti i calcoli 28 × 15 e 28 × 14 e nel primo anche della differenza tra i due risultati ottenuti. Gli allievi giungono alla risposta corretta, ma perdono inutilmente tempo a svolgere i calcoli. I due protocolli riportano due approcci diversi nel calcolo del risultato delle moltiplicazioni, un allievo utilizza il calcolo in colonna, l'altro applica strategie di calcolo mentale-scritto basate sulla scomposizione del numero e sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.





Tra coloro che sbagliano, il 27,5% fornisce come risposta 1, restituendo la differenza tra 14 e 15, i due fattori che variano e non la differenza tra i due prodotti come richiesto dal quesito.

Il resto degli studenti che ha risposto si è diviso equamente tra coloro che hanno scelto come risposta 15 o 14, cioè i fattori che variano nelle due moltiplicazioni.

In generale si rilevano difficoltà nella gestione di questo quesito, eppure si potrebbe da subito (e nella costruzione delle tabelline) compiere osservazioni del tipo: $3 \times 7 = 21$ e $3 \times 7 + 7 = 21 + 7 = 28 = 4 \times 7$.

Si segnala inoltre che il quesito registra ben l'8,3% di risposte mancanti o non valide e rappresenta il 39-esimo del secondo fascicolo.

D9) Sai che: 729 × 60 = 43740
Indica il risultato di 729 × 61.

a) 43740 + 1
b) 43740 + 60
c) 43740 + 729
d) 43740 + 61

Risposta corretta: c

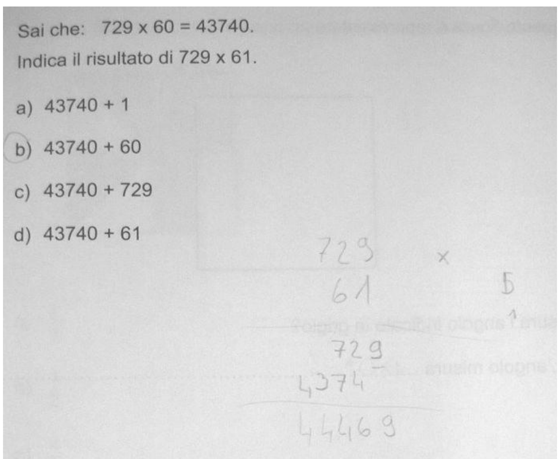
Risultati:

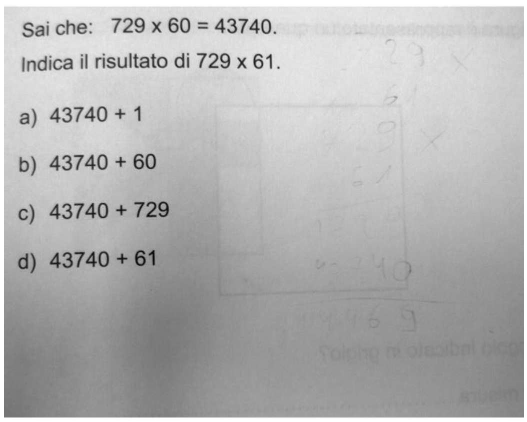
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
28,4	13,7	33,8	12,1	12,0

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Il quesito è analogo al precedente, ma le 4 opzioni di risposta in questo caso esplicitano in modo diretto il risultato dell'operazione richiesta. I risultati sono paragonabili a quelli precedenti a testimoniare la coerenza del ragionamento, seppur sbagliato, attuato dall'allievo, indice di una insufficiente riflessione concettuale. Nella domanda D8 il 27,5% ha risposto che la differenza del risultato delle due moltiplicazioni è 1, analogamente in questo quesito il 28,4% risponde 43740 + 1; il 10,5% - 10,6% ha risposto nella domanda D8) con uno dei due fattori, così come il 12,1% - 13,7% risponde in questo quesito rispettivamente: 43740 + 61, 43740 + 60. Rispetto al caso precedente però si registra un calo di risposte corrette (33,8%): gli studenti hanno trovato più difficoltà a rispondere alla richiesta del risultato di un'operazione con un'altra operazione, in quanto il ragionamento era basato sulle proprietà dell'operazione, invece che con un numero che si poteva ottenere attraverso il calcolo. In effetti, anche in questo quesito la maggior parte degli allievi ha svolto l'algoritmo, a volte perdendosi nei calcoli e decidendo quindi di non rispondere, come si può vedere dai seguenti protocolli.





Si precisa inoltre che il 12% degli allievi non fornisce risposta o ne sceglie più di una. Va considerato che questo è il 51-esimo quesito del secondo fascicolo.

D10) Indica l'uguaglianza corretta.

a) 74 × 8 = (70 × 8) + 4
b) 74 × 8 = (7 × 8) + (4 × 8)
c) 74 × 8 = (70 × 8) + (4 × 8)
d) 74 × 8 = (73 × 8) + 1

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
11,5	18,0	58,6	2,4	9,5

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – *Aspetto di competenza:* eseguire, applicare
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Il quesito vuole valutare la conoscenza degli allievi relativa alla proprietà distributiva della moltiplicazione. Le percentuali di riuscita in questo caso sono superiori a quelle ottenute dai quesiti D8) e D9), dove l'applicazione di tale proprietà avrebbe potuto facilitare la scelta della risposta corretta, se solo fosse stata applicata. Questo potrebbe evidenziare una conoscenza superficiale delle proprietà delle operazioni e una difficoltà ad applicarle in contesti diversi dal consueto. Il 58,6% degli allievi segna la risposta esatta, mentre il 18% sceglie l'opzione b), visivamente molto simile alla risposta corretta, ma concettualmente assai diversa, in quanto non viene dato alla cifra 7 del numero 74, il valore di decina. L'11,5% opta per la prima opzione, dove l'8 moltiplica solo le decine e non le unità del primo fattore. Infine, il 2,4% degli allievi segna la d), la risposta più inverosimile per gli allievi. È da notare che il 9,5% non risponde. Il quesito è il 36-esimo del secondo fascicolo.

D11) Indica il risultato di 8 × 0,6

a) 4,8
b) 0,48
c) 48
d) 0,048

Risposta corretta: a

Risultati:

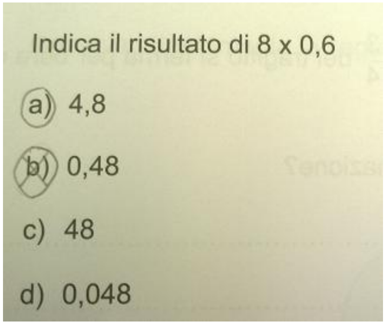
a	b	c	d	Mancante/ Non valida
44,0	33,3	11,7	3,3	7,7

Programmi '84:
Operazioni
Tecnica della moltiplicazione: (…) con numeri decimali sia al moltiplicando che al moltiplicatore: ad esempio 15,3 × 3,5 = ...

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

Il quesito ha lo scopo di indagare la capacità degli allievi di operare con i numeri decimali. Meno della metà risponde correttamente (44%), il 33,3% sceglie la risposta 0,48, operando come se fossero numeri naturali. Per lo studente infatti è plausibile che se 8 × 6 = 48 allora 8 × 0,6 dia come risultato 0,48, un'implicazione dalla forma accettabile agli occhi degli allievi, che trattano i numeri decimali come naturali con la virgola (Brousseau, 1983).

Il seguente protocollo evidenzia una indecisione iniziale dell'allievo che sceglie prima 0,48 per poi correggersi e scegliere la risposta corretta.



L'11,7% sceglie la terza risposta, 48, trascurando completamente la presenza dello 0: spesso infatti il bambino, soprattutto nella trattazione dei numeri decimali, non focalizza a pieno il ruolo dello 0 nei vari casi (0,6 è diverso da 6; ma 0,6 è uguale a 0,60), inoltre potrebbe incidere la misconcezione basata sulla convinzione che la moltiplicazione faccia sempre accrescere o rimanere invariato il valore dei due fattori. In D'Amore e Sbaragli (2005) viene messo in evidenza come la formazione prematura di un modello concettuale di moltiplicazione, quando si ha a disposizione solo l'insieme N dei numeri naturali, genera spesso misconcezioni quando si passa ad un altro insieme numerico. Tra queste, la più conosciuta e difficile da superare è "la moltiplicazione accresce sempre". Alla domanda posta a studenti di scuola media: "Quanto fa 4 × 0,5", diversi rispondono intuitivamente 8. Il tentativo di continuare ad applicare l'idea di accrescimento che si è creata in N quando la moltiplicazione viene eseguita sull'insieme Q dei numeri razionali, per esempio fra frazioni o fra numeri decimali, si rivela fallimentare. Non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari!) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni: 18 × 0,25 e 18 : 0,25 la prima è quella che dà un risultato minore, manifestando così la presenza del modello scorretto sopra menzionato creatosi nella scuola elementare.

Solo una minima percentuale di allievi sceglie 0,048 (3,3%). Il 7,7% corrisponde alle risposte mancanti o non valide. Il quesito è il 48-esimo.

D12) Due di questi calcoli hanno lo stesso risultato. Quali?

a) 234 × 10
b) 2,34 × 100
c) 2,34 × 1000
d) 23 × 40

Risposta corretta:
a-c

Risultati:

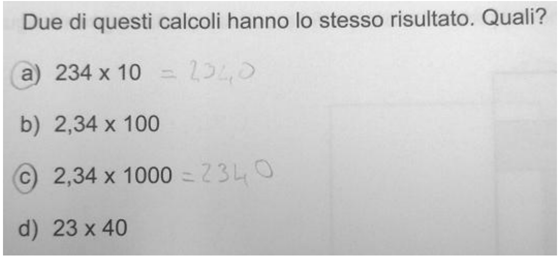
Risposta corretta	Risposte errate						Mancante/ Non valida
a-c	a-b	a-d	b-c	b-d	c-d	Altro	
28,4	21,7	19,3	5,3	1,4	1,0	8,2	14,7

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo.
(…) applicazione di particolari strategie di calcolo: ad esempio: × 10, × 100, × 1000 (…).

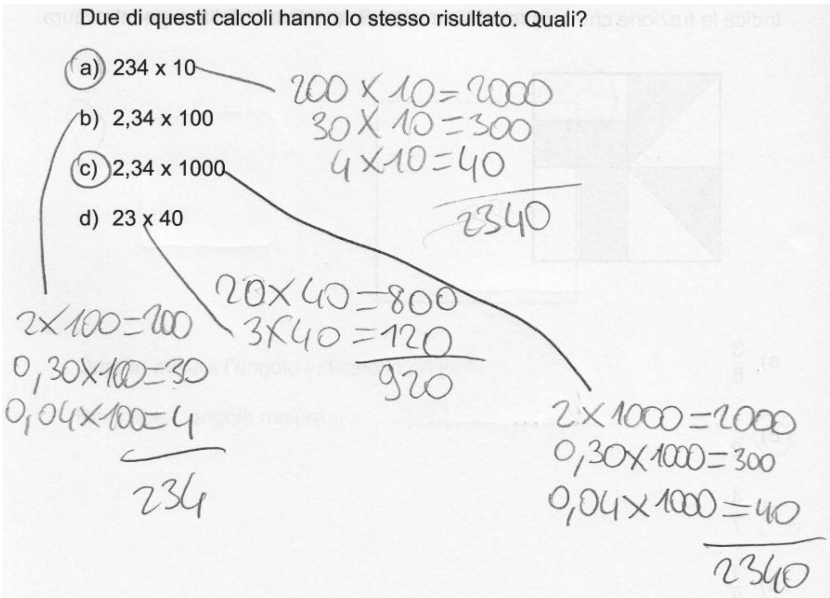
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Il quesito chiede di confrontare i risultati delle quattro operazioni indicate, tutte facilmente calcolabili con semplici tecniche di calcolo mentale, e di valutare quali hanno lo stesso valore. Nonostante questo, solo il 28,4% degli allievi fornisce la risposta corretta.

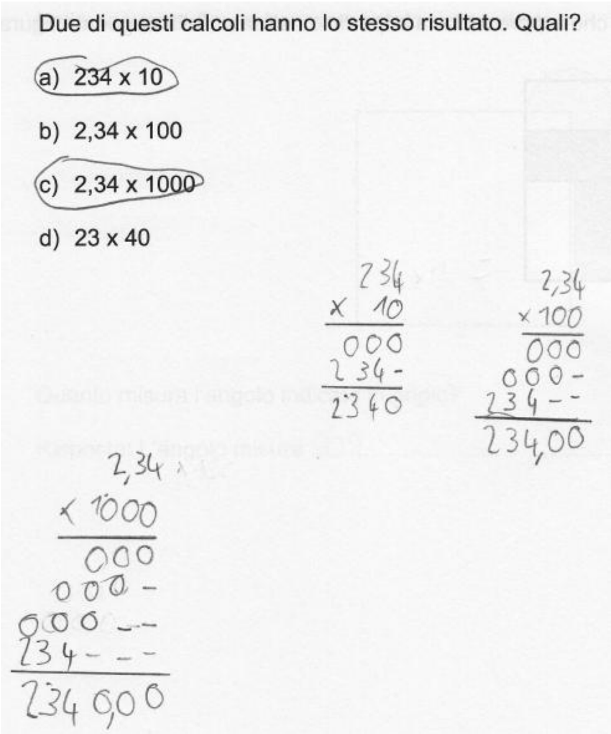
Qui a fianco riportiamo un protocollo di risposta corretta dove l'allievo indica esplicitamente il risultato delle due moltiplicazioni scelte.



Nel seguente protocollo l'allievo calcola in modo corretto il risultato di tutte le moltiplicazioni e di conseguenza effettua la scelta giusta. È da notare come in questo caso non applichi la regola di aggiungere zeri al numero naturale o spostare la virgola nel numero decimale, ma adotti strategie di calcolo in riga supportato dalle proprietà dell'operazione. Nel calcolo in riga, infatti, l'allievo gioca con le scomposizioni di un numero e con le proprietà della moltiplicazione, non deve ricordare nessun riporto, ma solo utilizzare le tabelline e l'addizione. Per un approfondimento si veda Arrigo (2011).

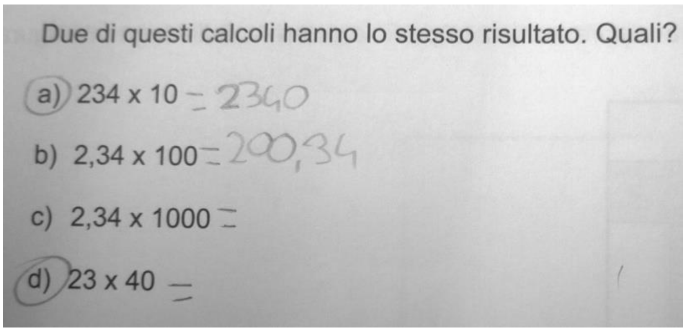


Approccio differente ma ugualmente corretto è quello che ritroviamo nel seguente protocollo, dove l'allievo preferisce adottare l'algoritmo usuale in colonna:



Utilizzare l'algoritmo in colonna per calcolare prodotti del tipo n × 10, n × 100, n × 1000,… è indice di una dipendenza che può portare nei livelli scolastici successivi a usare la calcolatrice anche per calcoli molto semplici.

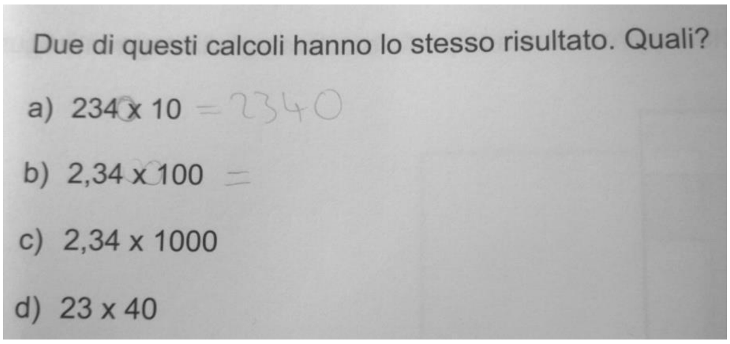
Per il 21,7% degli allievi i risultati dell'operazione a) e b) sono uguali, mentre il 19,3% degli allievi sceglie le operazioni a) e d). Quest'ultimo caso è scelto dagli allievi che credono di mantenere lo stesso risultato trasportando una cifra (in questo caso il 4) da un fattore a un altro, o da chi si basa per scegliere sul fatto che sono le uniche due operazioni con numeri naturali.



Il protocollo qui a fianco riporta un errore riscontrato non di rado nell'analisi delle risposte. L'allievo moltiplica per 100 e presumibilmente per 1000 solo la parte intera del numero e lascia inalterata la parte decimale. Si trova dunque a confrontare 2340 con 200,34 e 2000,34. Andando per esclusione decide di scegliere la prima e l'ultima moltiplicazione.

Il 5,3% ha considerato uguali le operazioni b) e c), forse spinti dall'applicazione della presunta "regola" che se si moltiplica un numero per le potenze di 10, si devono aggiungere a destra del numero tanti zeri quanti sono quelli presenti nella potenza del 10 (2,34 × 100 = 2,3400 = 2,34000 = 2,34 × 1000). Si tratta di una tipica misconcezione dovuta all'acquisizione di una regola che per i numeri naturali risulta "esatta" ma che non può essere applicata anche ai numeri decimali (Maier, 1998).

Nel seguente protocollo anche se l'allievo ha lasciato la risposta in bianco ha tentato di effettuare una scelta operando su alcune moltiplicazioni. Si può notare l'aggiunta dei due zeri al primo fattore nella moltiplicazione per 100, nonostante 2,34 sia un numero decimale.


Due di questi calcoli hanno lo stesso risultato. Quali?

a) 234 x 10 = 2340

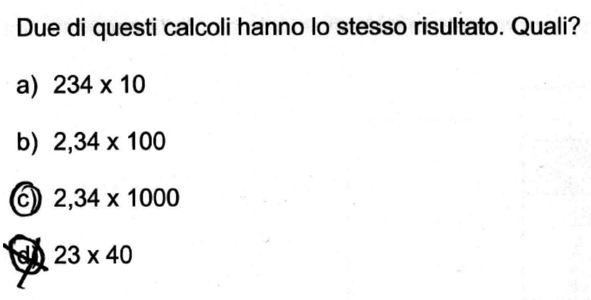
b) 2,34 x 100 =

c) 2,34 x 1000

d) 23 x 40

Riscontriamo poi percentuali minime di studenti che rispondono b)-d) e c)-d).

La categoria “Altro” comprende gli allievi che forniscono come risposta una sola operazione, dimostrando dunque di non aver capito la richiesta del quesito. In particolare: il 3,4% risponde solo a), l’1,9% risponde solo c), l’1,4% risponde solo d) e l’1% risponde solo b). È da sottolineare però che la forma della domanda ricorda la tipologia di quesito a risposta chiusa dove è necessario scegliere una sola risposta fra le quattro proposte; va quindi ripensata una diversa impostazione della domanda o un’esplicitazione più marcata della scelta di due opzioni.


Due di questi calcoli hanno lo stesso risultato. Quali?

a) 234 x 10

b) 2,34 x 100

c) 2,34 x 1000

d) 23 x 40

Nel protocollo qui a fianco l’allievo inserisce un cerchietto così come era richiesto nelle domande a risposta multipla precedenti (e come specificato nelle istruzioni contenute nella prima pagina del fascicolo) e fa una crocetta sulla risposta che ha sbagliato a segnare.

Inoltre osserviamo un’importante percentuale di risposte mancanti (14,7%), giustificata anche dal fatto che il quesito è il 54-esimo somministrato nel secondo fascicolo.

5.4. Divisione

D13) Completa: 72 : ……. = 9

Risposta corretta:
8

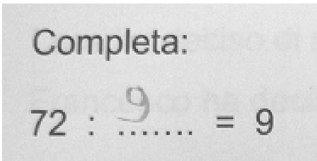
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate		Mancante/ Non valida
8	9	Altro	
91,1	1,4	4,0	3,5

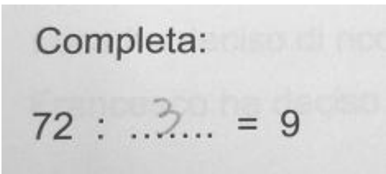
Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione:
• ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni;
• relazione tra moltiplicazione e divisione. (Ad esempio: operatori diretti e inversi, catene di operatori, analisi della tavola di moltiplicazione e di divisione; diverso ruolo dello zero e dell'uno, ecc.);
• memorizzazione della tavola della divisione.

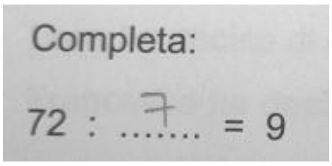
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

Questa domanda richiede di calcolare il numero che moltiplicato per 9 restituisce 72. In altre parole si chiede di trovare il divisore, noto il dividendo e il quoziente. Gli allievi non mostrano particolari difficoltà, data anche la presenza di numeri facilmente manipolabili, infatti si registra il 91,1% di risposte corrette. Tra coloro che forniscono una risposta scorretta l'1,4% scrive lo stesso valore del quoziente, 9. Di seguito riportiamo un protocollo come esempio:

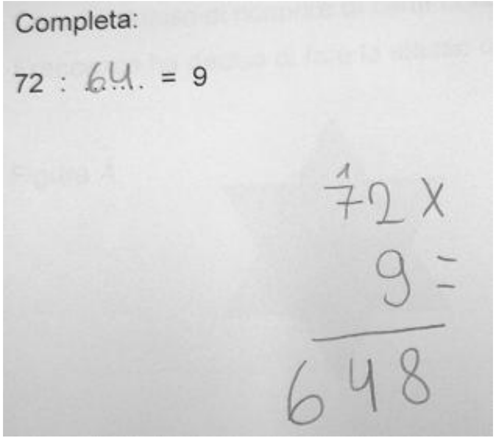

Completa:
72 : ..9.... = 9

La categoria "Altro" comprende risposte di vario tipo: l'1% risponde 3 e 7; lo 0,5% risponde 6 e 10; lo 0,2% risponde 2, 5, 11, 63 e 64.


Completa:
72 : ..3.... = 9

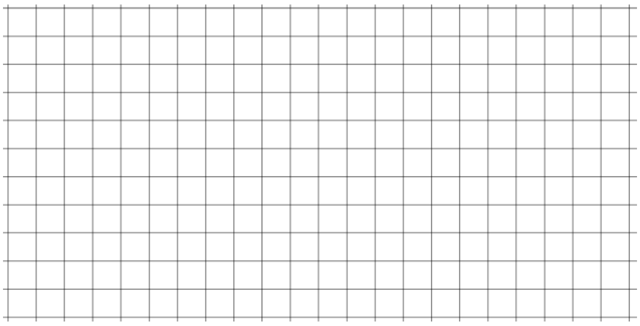

Completa:
72 : ..7.... = 9

Nel seguente protocollo l'allievo riporta il calcolo effettuato per trovare il numero da inserire al posto dei puntini. Invece di svolgere una divisione effettua una moltiplicazione, probabilmente indotto dal fatto che la moltiplicazione è considerata l'operazione inversa della divisione. Osserviamo però che l'allievo poi decide di inserire nei puntini solo le prime due cifre del risultato e non l'intero numero 648. Di nuovo riaffiorano difficoltà concettuali a volte dipendenti da un apprendimento mnemonico.



Il 3,4% corrisponde alle risposte mancanti o non valide.

D14) Esegui la divisione 84 : 4



Risposta corretta:
Accettabile qualsiasi procedimento svolto in modo corretto che porta al risultato 21.

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errata					Mancante/ Non valida
Risultato e algoritmo corretto	**Procedimento incompleto**	**20**	**24**	**22**	**Altro**	
75,0	2,7	2,4	2,0	1,5	6,4	10,0

Programmi '84:
Operazioni
Tecnica della divisione: con numeri interi e con divisore di una cifra (del tipo 248 : 6 =).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

D15) Svolgi la divisione 6363 : 7

Risposta corretta:
Accettabile qualsiasi procedimento svolto in modo corretto che porta al risultato 909.

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errata					Mancante/ Non valida
Risultato e algoritmo corretto	**99**	**Procedimento incompleto**	**900**	**0909**	**Altro**	
47,6	10,4	3,9	3,6	1,7	16,1	16,7

Programmi '84:
Operazioni
Tecnica della divisione: con numeri interi e con divisore di una cifra (del tipo 248 : 6 =).

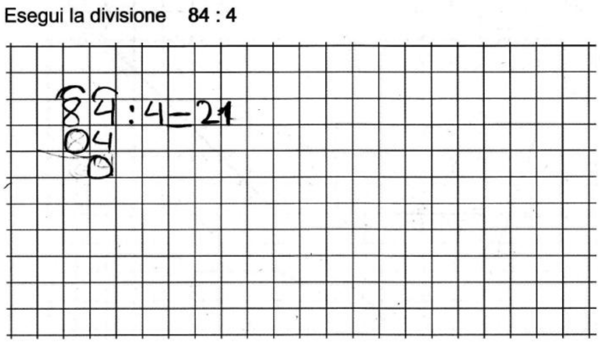
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.

I due quesiti precedenti richiedono entrambi di eseguire una divisione con numeri naturali e con divisore di una cifra. Confrontando le due tabelle di risultati è evidente la differenza di risposte corrette date al primo e al secondo quesito (75% e 47,6% rispettivamente). La consegna è la stessa ma evidentemente il fatto di avere il dividendo costituito da più cifre o di avere come divisore il 7 invece del 4 ha creato difficoltà almeno al 30% degli allievi. Per quanto riguarda il concetto di divisione ricordiamo la ricerca di Arrigo e Sbaragli (2008) basata su di un'indagine effettuata su 73 insegnanti di scuola elementare (41 ticinesi e 32 piemontesi) per valutare le loro convinzioni relative all'operazione di divisione e agli insiemi numerici nei quali può essere definita tale operazione. Dai risultati emergono in diversi casi una mancanza di sapere consapevole su questo argomento oltre alla presenza di misconcezioni e modelli intuitivi erronei e incoerenti che ricadono sulla trasposizione didattica. Le origini delle difficoltà nell'apprendimento del concetto di divisione da parte degli allievi potrebbero quindi dipendere da ostacoli non solo di tipo epistemologico, ma didattico. Per questo secondo aspetto può risultare utile l'articolo di Sbaragli (2009b) che tratta le insidie della divisione.

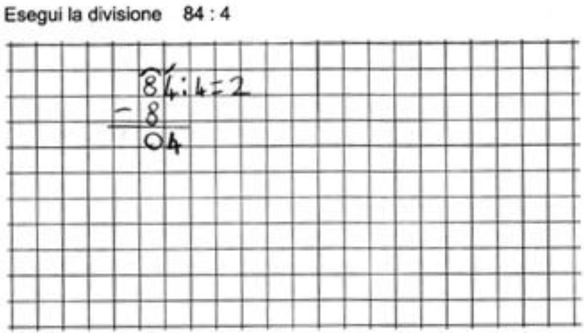
Osserviamo dai protocolli analizzati che gli allievi, in entrambe le divisioni, preferiscono un'esecuzione in colonna, nonostante avessero potuto scegliere una qualsiasi strategia, ad esempio di calcolo mentale o mentale-scritto. Infatti, ad esempio nel secondo quesito, una scomposizione del numero 6363 in 6300+63 avrebbe permesso agevolmente di applicare la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione e scrivere 6363:7 = (6300 + 63) : 7 = 900 + 9 = 909, senza incappare in errori di calcolo. Per un confronto didattico tra calcolo scritto e calcolo mentale si consultino gli articoli di Arrigo (2000, 2011), dove vengono presentate sperimentazioni che sottolineano l'importanza di educare all'attivazione di strategie di calcolo mentale, applicando le proprietà delle operazioni. Le ricerche in didattica dimostrano che l'abitudine al calcolo mentale, alla stima e al controllo semantico del risultato sono tutti fattori che possono contribuire anche al consolidamento dell'abilità nell'esecuzione della procedura standard di divisione.

Relativamente al primo quesito, registriamo un 2,7% di risposte con un procedimento incompleto, il 2,4% fornisce come risultato 20, il 2% risponde 24, per l'1,5% il risultato della divisione è 22. La categoria "Altro" comprende svariate risposte scorrette date con basse percentuali: 1, 11, 19, 2, 26, 30, 32, 40, 41, 56, 6 e 7 con lo 0,3-0,4%.

Di seguito inseriamo alcuni protocolli:

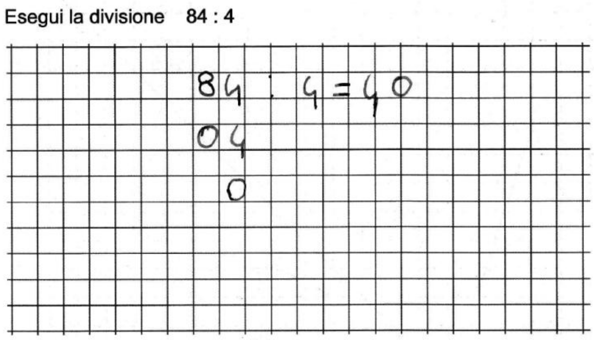


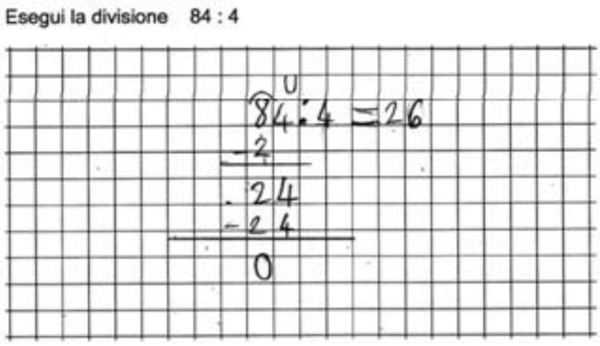
L'allievo esegue correttamente la divisione.



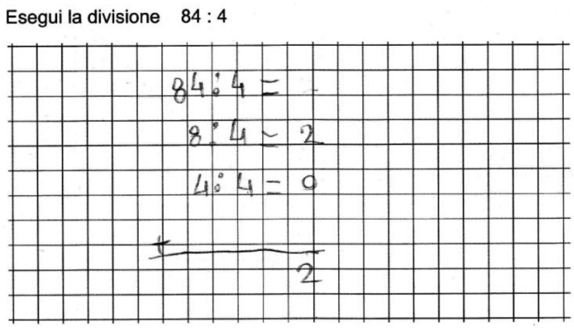
L'allievo non completa l'algoritmo.

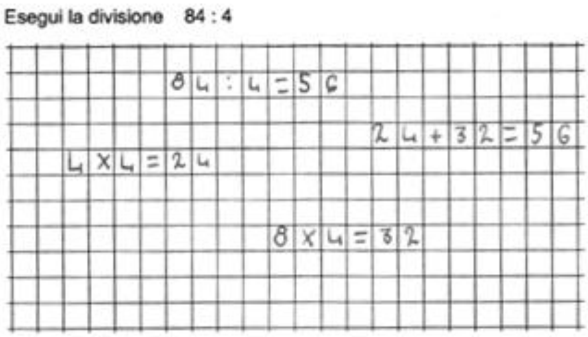
Alcuni allievi commettono errori di calcolo.





Altri allievi rielaborano l'algoritmo della divisione facendo anche errori di calcolo.

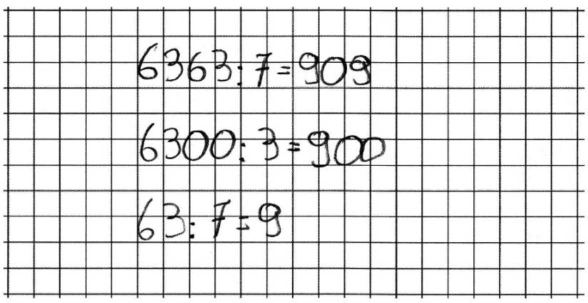




Riguardo al quesito D15) la scelta erronea più diffusa ricade su 99 (10,4%), mentre il 3,9% degli allievi non completa il procedimento, il 3,6% fornisce come risultato 900 e l'1,7% risponde 0909. La categoria "Altro" comprende le seguenti risposte scorrette: 9 (1%), 90603 (1%), 923 (1%), 901 (0,7%), 901 con resto 1 (0,7%), 91 (0,5%) e diverse altre con percentuali irrilevanti 0,2%-0,3%.

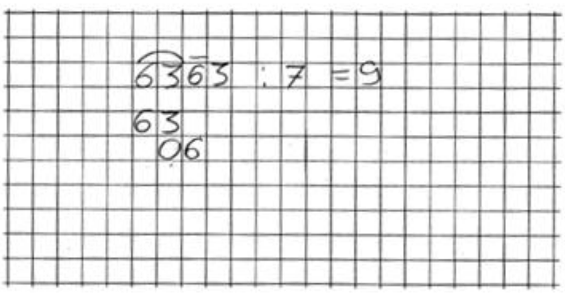
Presentiamo di seguito alcuni protocolli:

Svolgi la divisione 6363 : 7



L'allievo riporta procedimento e risultato corretto.

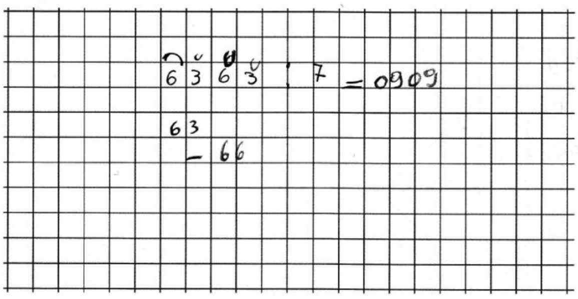
Svolgi la divisione 6363 : 7



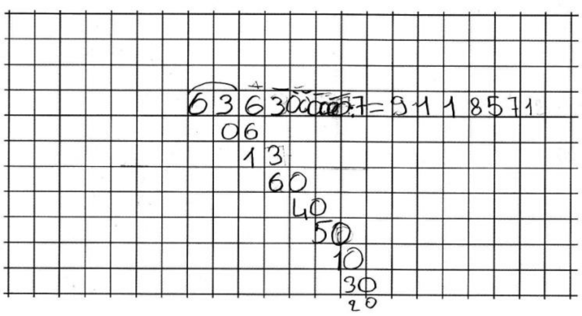
Il protocollo riporta un procedimento incompleto.

I seguenti allievi applicano in modo sbagliato l'algoritmo o commettono errori di calcolo:

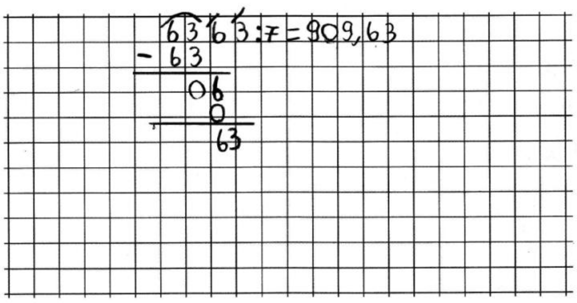
Svolgi la divisione 6363 : 7



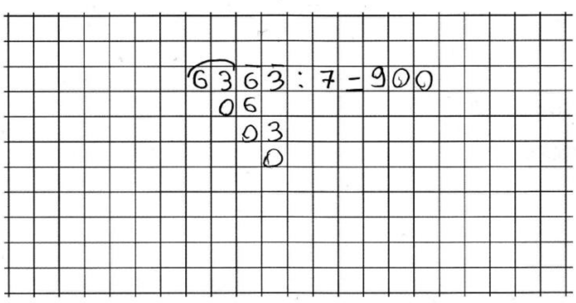
Svolgi la divisione 6363 : 7

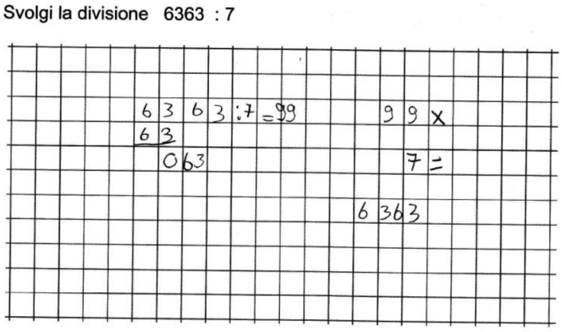


Svolgi la divisione 6363 : 7



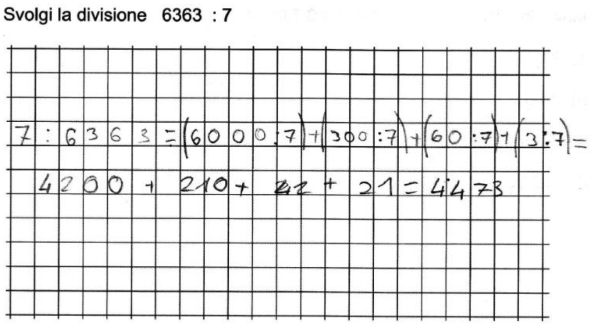
Svolgi la divisione 6363 : 7

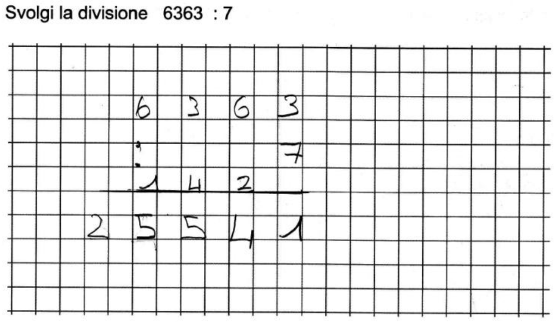




Lo studente sbaglia sia la divisione che la moltiplicazione come prova.

Gli allievi eseguono la moltiplicazione invece della divisione, sbagliando il procedimento e i calcoli:





D16) Indica il calcolo che dà lo stesso risultato di 840 : 30 a) 84 : 30 b) 840 : 3 c) 84 : 3 d) 840 : 20	**Risposta corretta: c** **Risultati:**

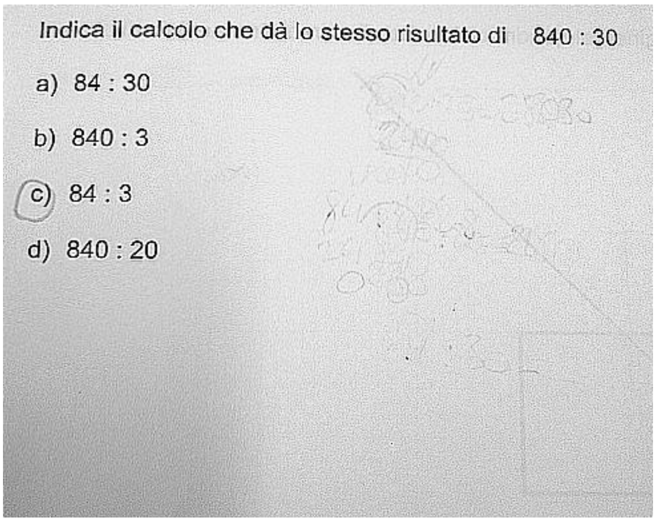
a	**b**	**c**	**d**	**Mancante/ Non valida**
18,7	26,2	32,6	4,8	17,7

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo.
(…) applicazione di particolari strategie di calcolo: ad esempio: × 10, × 100, × 1000, : 10, : 100, : 1000 (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

I risultati di questo quesito dimostrano come gli allievi non riescano ad applicare efficacemente le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale. Il *question intent* della domanda è quello di valutare la conoscenza della proprietà invariantiva e la capacità di utilizzarla in una situazione problematica.

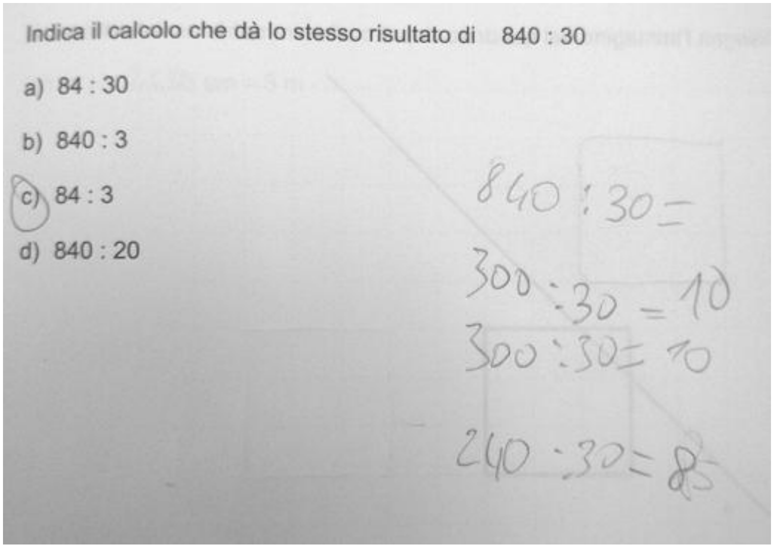
Dall'analisi dei protocolli emerge che gli allievi preferiscono svolgere tutte o alcune delle quattro divisioni per decidere quale fornisce lo stesso risultato di 840 : 30, come evidenziano i seguenti protocolli nei quali si intravedono cancellati oppure sono esplicitati i calcoli in colonna.



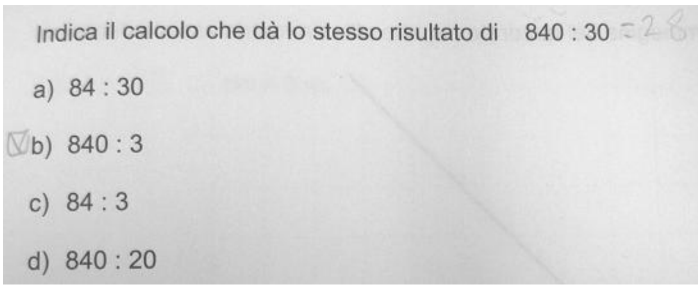
In questo primo caso lo studente sembra calcolare tutti i quozienti e di conseguenza scegliere l'opzione c). Operando in questo modo però la probabilità di sbagliare il calcolo aumenta notevolmente. Sarebbe più semplice e comodo applicare la proprietà invariantiva.

Per favorire la costruzione di tali aspetti concettuali si potrebbero proporre presto situazioni del tipo +3 / –3, ×10 / :10, ecc. anche applicate in ambito geometrico, come nel calcolo dell'area di un triangolo, ad esempio: (3,7 × 2) : 2.

Nel seguente protocollo l'allievo applica in modo corretto strategie di calcolo mentale per ricavare il quoziente, però non conclude.



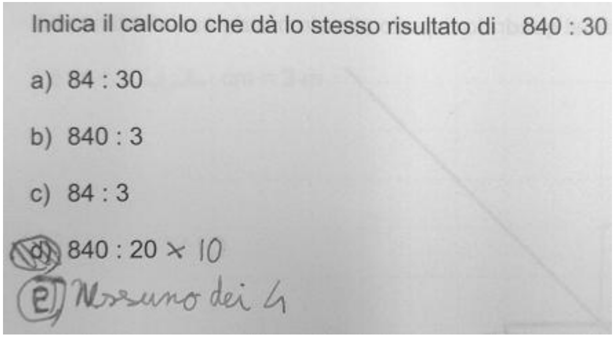
Poco meno di un terzo risponde correttamente, ma ben il 26,2% reputa 840 : 30 = 840 : 3.



Qui a fianco riportiamo un protocollo dove si vede che l'allievo ha calcolato in modo corretto il risultato di 840 : 30, ma sceglie l'opzione sbagliata. È da notare inoltre una scarsa capacità di stima e una mancanza di controllo del risultato finale; 840 : 3 fornisce un risultato sicuramente maggiore di 200, incompatibile dunque con il 28 ricavato inizialmente.

Il 4,8% sceglie l’opzione d) non accorgendosi forse che le cifre del divisore erano cambiate. È da notare anche l’alta percentuale di omissione delle risposte (17,7%), forse dovute al fatto che il quesito è il 57-esimo del secondo fascicolo.

Di seguito riportiamo il protocollo di un allievo che non trova tra le risposte date quella che secondo lui è corretta, decide dunque di inserire una quinta opzione del tipo: “Nessuno dei 4”.


Indica il calcolo che dà lo stesso risultato di 840 : 30

a) 84 : 30

b) 840 : 3

c) 84 : 3

d) 840 : 20 × 10

e) Nessuno dei 4

Dalla modifica indicata possiamo dedurre che l’allievo presumibilmente aveva individuato nella quarta risposta quella più vicina alla soluzione, ma non esattamente la risposta corretta, dato che ha poi deciso di aggiungere la modifica “× 10”, forse giustificata dal fatto di volersi ricondurre alla divisione 840 : 30. Se così fosse, l’allievo avrebbe sbagliato anche a inserire il × al posto del + e a non mettere le parentesi in modo adeguato.

5.5. Stima di risultati di calcoli

D17) Stima il risultato del calcolo:
19,89 + 10,732 + 9,274

a) 20
b) 30
c) 40
d) 70

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
1,2	11,6	62,5	19,4	5,3

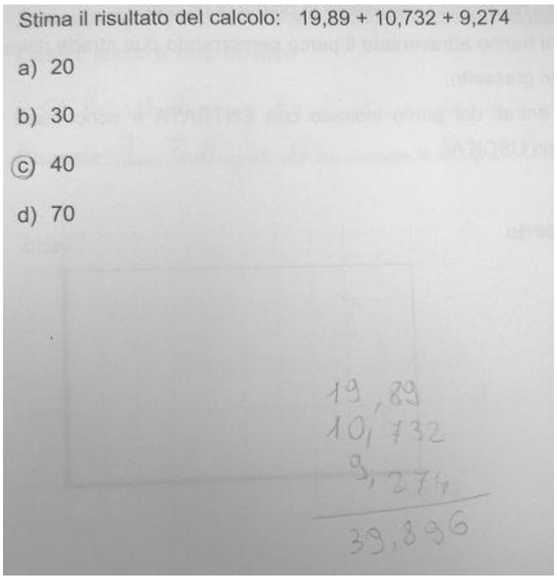
Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo, applicandole anche all'estensione del campo numerico oltre il migliaio e ai numeri con la virgola.
Non c'è un riferimento esplicito alla stima di un calcolo. In V troviamo l'indicazione:
Operazioni
(…) calcoli rapidi per arrotondamento (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di approssimare numeri decimali o stimare risultati di calcoli.

Il quesito vuole valutare la capacità dell'allievo di approssimare i numeri decimali e quindi stimare il risultato dell'addizione. Non si richiede un'individuazione precisa della somma, bensì una stima di quale dei quattro valori presentati sia il più vicino al risultato effettivo.

Come è sostenuto da Arrigo (2014): «Contrariamente alla tradizione scolastica che ha (quasi) sempre esaltato il risultato esatto o, quando non è possibile, il risultato "con precisione a meno di …", nell'insegnamento odierno assume molta importanza il calcolo approssimato. Questo dev'essere eseguito senza alcun ausilio tecnologico». In molte situazioni ci si trova a dover farsi un'idea di una certa somma di denaro o di una misura di altra natura, sul momento, senza poter usare nessuno strumento tecnologico. Ma anche quando si esegue un algoritmo con l'ausilio della macchina è assolutamente necessario stimare il risultato che questa ci ritorna e interpretarlo adattandolo alla situazione che si sta considerando. Per quanto riguarda la stima computazionale (che si riferisce al risultato di calcoli), Reys (1986) la definisce come il processo di trasformazione di un problema dalla sua forma originale ad una nuova forma che dia approssimativamente una risposta equivalente e che sia facilmente risolvibile mediante calcolo mentale. In questo senso, si possono distinguere tre differenti processi di stima (la riformulazione, la traslazione e la compensazione), così come stabilito in Alajmi (2009). È proprio il processo di semplificazione dei numeri e/o del problema, sui quali si innesta poi il calcolo mentale, che porta ad ottenere risultati approssimati e non esatti: per questo, talvolta, si usa l'espressione *calcolo mentale approssimato* in riferimento alla stima computazionale.

I tre addendi del quesito sono tutti facilmente arrotondabili alla decina successiva (19,89 e 9,274) o precedente (10,732), nonostante questo solo il 62,5% degli allievi risponde correttamente. Di seguito riportiamo un protocollo di risposta esatta dove l'allievo, però, svolge ugualmente l'addizione in colonna e una volta individuato il risultato sceglie tra i quattro numeri presentati il più vicino, procedendo in modo diverso rispetto all'intenzione dei creatori dei quesiti.


Stima il risultato del calcolo: 19,89 + 10,732 + 9,274

a) 20

b) 30

c) 40

d) 70

19,89
10,732
9,274
39,896

Va osservato che più del 30% sbaglia: il distrattore più scelto è 70 (19,4%), seguito dalla seconda opzione (30) con l'11,6% degli allievi, mentre l'1,2% stima il risultato 20. La capacità di stimare un risultato necessita di un insegnamento specifico e lo studente che avrà fatto esperienze di approssimazione di calcoli mentali per giungere a stimare un risultato sarà sicuramente avvantaggiato nella risoluzione di quesiti di questo tipo. Le pratiche didattiche spesso tendono a sottovalutare questa capacità e si soffermano maggiormente sullo sviluppo del calcolo esatto.

Stimare una grandezza, approssimare un numero, fare calcoli approssimati sono invece competenze sempre più richieste per la vita quotidiana in cui siamo spesso coinvolti in attività che richiedono la comprensione e l'elaborazione veloce di dati.

D18) Il risultato di uno dei seguenti calcoli è maggiore di 200. Stima qual è.

a) 21 × 5
b) 19 × 12
c) 600 : 4
d) 2000 : 15

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
6,5	37,9	16,5	31,7	7,4

Programmi '84:
Operazioni
Calcoli mentali: utilizzazione delle proprietà commutativa, associativa, distributiva e invariantiva nelle strategie di calcolo.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di approssimare numeri decimali o stimare risultati di calcoli.

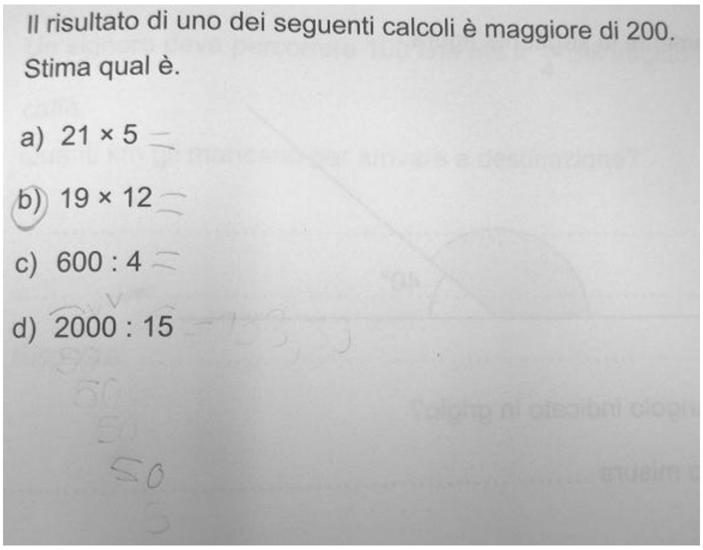
Anche questo quesito non vuole valutare l'esecuzione di un calcolo quanto la capacità dell'allievo di stimarne il risultato. Nonostante i numeri siano tutti naturali, la percentuale di risposte corrette risulta piuttosto bassa (37,9%). Va tenuto presente però che in questo caso l'allievo doveva valutare tutte e quattro le operazioni proposte per poter dare una risposta. Per ognuna di queste era possibile stimare il risultato utilizzando le proprietà della moltiplicazione e divisione per velocizzare il calcolo: 21 × 5 è la metà di 210; 600 : 4 = (600 : 2) : 2 =

300 : 2 = 150; 2000 : 15 = (2000 : 5) : 3 = 400 : 3 è minore di 200; 19 × 12 è poco inferiore a 20 × 12 = 240.

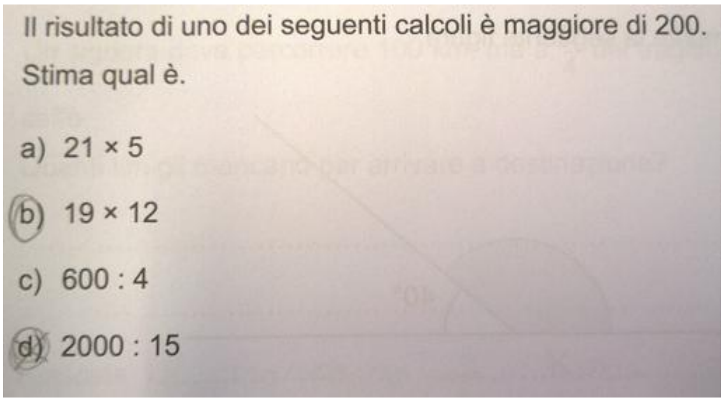
Non era dunque necessario e nemmeno auspicabile una impostazione del calcolo scritto.

Così non è stato per molti allievi, come emerge dall'analisi dei protocolli. A fianco delle risposte si trovano infatti i calcoli in colonna, a volte sbagliati, a volte cancellati, per ognuna delle quattro operazioni.

Di seguito riportiamo un protocollo di risposta corretta dove si intravedono alcuni calcoli in colonna effettuati per stimare il risultato:

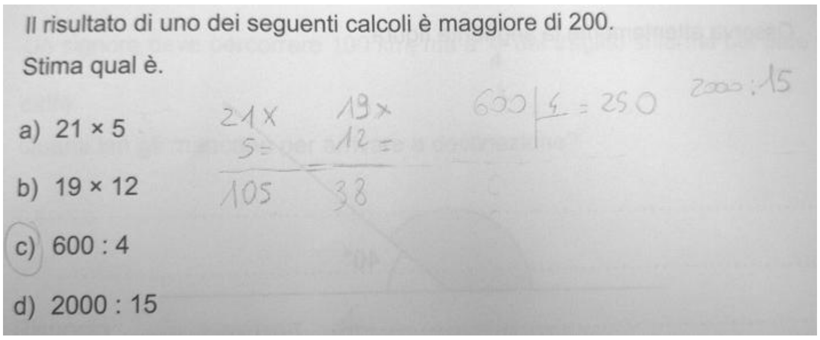


Nel seguente protocollo osserviamo l'indecisione dell'allievo che decide solo in un secondo momento di scegliere l'opzione b).



Quasi un terzo degli alunni, precisamente il 31,7%, ha scelto la risposta d) forse influenzati dalla presenza del numero più grande tra quelli indicati e dalla richiesta del risultato "maggiore" di 200.

Segue poi l'opzione c) con il 16,5% e la a) con il 6,5% di preferenze.



Il risultato di uno dei seguenti calcoli è maggiore di 200.
Stima qual è.

a) 21 × 5
b) 19 × 12
c) 600 : 4
d) 2000 : 15

21 × 5 = 105
19 × 12 = 38
600 | 4 = 25 0
2000 : 15

Il protocollo qui a fianco riporta una riposta sbagliata dovuta a errori di calcolo impostati con l'algoritmo in colonna e che evidenziano incapacità di gestire calcoli mentali.

Gli allievi che non hanno fornito una risposta o ne hanno data una non valida, sono il 7,4% del totale.

D19) Osserva il seguente calcolo: 397 – 84
Il suo risultato è:

a) maggiore di 300
b) minore di 300

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
90,8	8,8	0,4

Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di approssimare numeri decimali o stimare risultati di calcoli.

Decisamente migliori sono i risultati a questo quesito, il 90,8% di risposte corrette. La domanda risulta troppo facile: richiede, sì, la stima di un calcolo, ma va osservato che la presenza di una sola operazione facile da interpretare, e con due sole opzioni di risposta, ha facilitato enormemente gli allievi. A questa domanda i bambini potevano rispondere senza eseguire calcoli, ma solo osservando che le decine del minuendo erano maggiori del sottraendo. Inoltre la percentuale di allievi che non hanno risposto è notevolmente bassa (0,4%), giustificabile anche con il fatto che il quesito è il sesto del secondo fascicolo.

5.6. Uguaglianze

D20) Completa correttamente:
3 + 5 = ………. × 2

Risposta corretta:
4

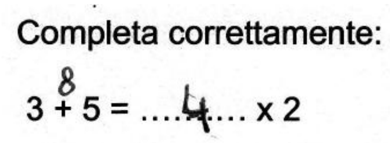
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate			Mancante/ Non valida
4	**8**	**16**	**Altro**	
44,3	33,6	4,4	6,3	11,4

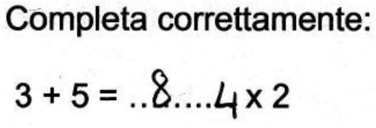
Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione: relazione tra moltiplicazione e divisione.
Calcoli mentali: calcoli mentali, con dati semplici, con catene di operazioni.

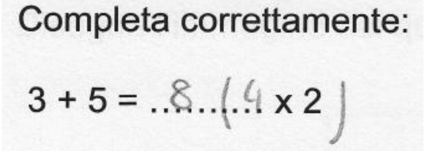
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di eseguire calcoli concernenti le quattro operazioni applicando tecniche e strategie di calcolo mentale, mentale-scritto, scritto e strumentale, adeguate a seconda della complessità della situazione.
L'allievo è in grado di applicare le proprietà delle operazioni per facilitare il calcolo mentale e mentale-scritto.

Il quesito richiede di inserire il numero al posto dei puntini in modo che l'uguaglianza sia soddisfatta. Nonostante la presenza di numeri piccoli, meno della metà degli studenti dà la risposta corretta (44,3%).



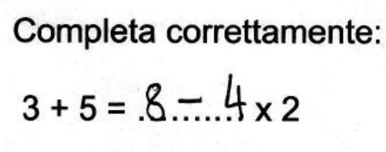
La difficoltà di questo quesito non risiede nell'esecuzione delle semplici operazioni proposte quanto nell'interpretare il giusto significato del simbolo "=". È stato ampiamente rilevato dalla ricerca internazionale, ritenuta oramai classica, che lo studente ha, nei confronti dell'uguaglianza, un comportamento cognitivo diverso da quello atteso dall'insegnante, specie all'ingresso nella scuola superiore: mentre il docente pensa all'uguaglianza come ad una relazione binaria di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva), lo studente la vede fin dalla scuola elementare (e poi non se ne discosta più, anche se acquisisce altri usi ed altre interpretazioni dello stesso concetto) come un "segno direzionale", orientato da sinistra verso destra, dunque un indicatore procedurale che ha a sinistra gli "operandi" e a destra (preferibilmente) un numero unico, il "risultato" (Camici et al, 2002; Kieran, 1988). Così si perde totalmente la simmetria dell'uguaglianza. Questa anomalia si ripercuote più tardi, a partire dalla scuola media, inibendo l'apprendimento della risoluzione ragionata e cosciente delle equazioni. Significativa è l'alta percentuale di allievi che risponde 8 (33,6%), svolgendo il calcolo richiesto a sinistra dell'uguale (3+5), tralasciando di fatto quello che c'è scritto nel membro di destra. Questo comportamento è studiato in modo approfondito in didattica della matematica ed evidenziato in tantissime situazioni d'aula (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013).



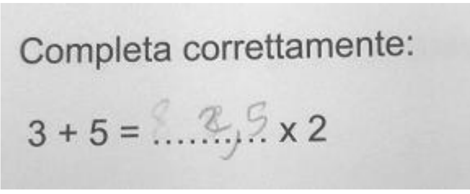


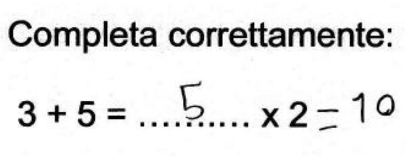
Il 4,4% evidenza la necessità di concatenare le operazioni fino al valore 16, dimostrando di essere abituati a fornire il risultato di un'operazione e non di lavorare su uguaglianze come quella del quesito.

La categoria "Altro" comprende risposte come 15 (1%), 7,5 (1,5%) dove in entrambi i casi l'allievo presumibilmente ha confuso l'addizione con la moltiplicazione (ossia gli allievi eseguono 3 × 5 = 15, quindi 7,5 × 2 = 15); 8 – 4 (1%) a dimostrazione del fatto che lo studente avverte l'esigenza di operare con i numeri, non vedendone il significato.



Emergono inoltre le risposte 2,5, 5, 10, 0,2, 6, 7, 30 e 70 con percentuali che si aggirano sullo 0,2-0,3%.





Nel primo caso l'allievo dimostra di saper leggere l'uguaglianza in entrambi i sensi, ma di non essere in grado di concatenare le operazioni. Risolve correttamente 3 + 5 = 8 e 5 = 2,5 × 2.

L'11,4% non risponde, ma va tenuto conto anche del fatto che la domanda era la 60-esima del secondo fascicolo.

6. Numeri e calcolo – Argomentare e giustificare

La suddivisione tematica dei quesiti nell'ambito "Numeri e Calcolo", aspetto di competenza: "Argomentare e giustificare", è stata individuata come segue: ordinamento numeri decimali (3 quesiti), situazioni-problema (6 quesiti), addizioni (2 quesiti), moltiplicazioni (5 quesiti), divisioni (2 quesiti), uguaglianza (1 quesito), passaggio di registri semiotici (1 quesito). I 20 quesiti sono così suddivisi: 3 a risposta aperta articolata e 17 a risposta chiusa, di cui 4 con 2 opzioni di scelta, 7 con 3 opzioni di scelta e 6 con 4. Anche in questo ambito notiamo un'organizzazione disomogenea delle tipologie dei quesiti per le risposte chiuse.

Nelle tabelle 1-2 sono riportate le risposte ai 20 quesiti, con l'indicazione delle percentuali ottenute, suddivise per tipologia: risposta chiusa, aperta univoca o aperta articolata. Sono state evidenziate quelle corrette. Il testo di ciascun quesito con le relative percentuali di riuscita, l'individuazione della tematica relativa ai quesiti nei Programmi del 1984 e nel nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e il relativo commento didattico sono presentate di seguito. Le percentuali riportate nelle seguenti tabelle sono state calcolate in base ai risultati dell'intera popolazione di allievi (2935), alla quale sono stati somministrati i fascicoli. Per l'analisi dei protocolli e delle risposte date ai soli quesiti a risposta aperta univoca o articolata è stato selezionato un campione significativo di 414 studenti. Le percentuali riportate nelle tabelle a fianco di ciascuno dei quesiti sono state calcolate sul suddetto campione.

• Quesiti a risposta chiusa

Domanda	Risposte (%)				Mancante/ Non valida (%)
	a	b	c	d	
E1	6,7	81,1	3,1	1,2	7,9
E3	19,9	76,7			3,4
E2	4,6	1,7	72,6	13,4	7,7
E4	5,1	6,5	82,7		5,7
E5	7,4	32,1	56,0		4,5
E6	13,5	27,7	49,3		9,5
E7	56,9	5,8	30,9		6,4
E8	47,2	20,4	14,6		17,8
E9	21,3	2,6	26,9	38,5	10,7
E10	4,6	67,0	1,8	22,9	3,7
E11	49,3	33,9			16,8
E12	50,5	46,1			3,4
E13	42,6	18,8	8,0	9,5	21,1
E14	26,9	20,5	26,9		25,7
E17	25,0	6,2	45,7	19,4	3,7
E18	47,7	46,7			5,6
E19	9,5	49,3	34,0	7,2	9,5

• Quesiti a risposta aperta articolata

Domanda	Risposta corretta (%)	Risposta errata (%)	Mancante/ Non valida (%)
E15	22,8	28,1	49,1
E16	19,9	28,4	51,7
E20	31,0	51,8	17,2

Tabella 1-2: Risposte alle diverse tipologie di quesiti

6.1. Ordinamento numeri decimali

E1) La maestra scrive alla lavagna: 2,01 > 1,97 Ha ragione? Indica la risposta con la spiegazione corretta. a) Sì, perché 9>1. b) Sì, perché 2>1. c) No, perché 9>0. d) No, perché 7>1.	**Risposta corretta: b** **Risultati:**

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
6,7	81,1	3,1	1,2	7,9

Programmi '84:
Numeri
Introduzione dei numeri con la virgola fino al centesimo.

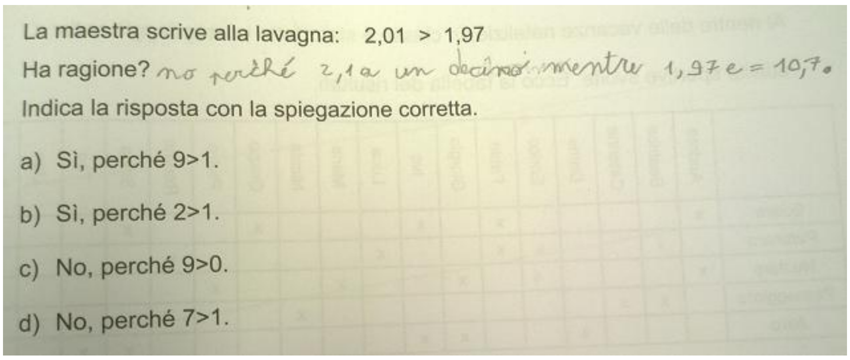
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di leggere, scrivere, confrontare e ordinare numeri naturali e decimali.

Il quesito verte sull'individuare la motivazione corretta per stabilire la veridicità dell'ordinamento di due numeri espressi in forma decimale. A questo quesito risponde in modo corretto l'81,1% degli allievi, giustificando che dipende dalla grandezza della parte intera del numero. Tale spiegazione risulta abbastanza intuitiva, dato che coincide con lo stesso tipo di confronto che avviene per i numeri naturali.

Tra coloro che rispondono in modo scorretto il 6,7% risponde sì, che è corretto, ma con la motivazione sbagliata, legata al fatto che il 9, che corrisponde ai decimi, è maggiore del'1, che corrisponde ai centesimi, mostrando così lacune nel riconoscere il valore posizionale nella parte decimale del numero razionale. Il 3,1% risponde di no, perché confronta solo la parte decimale del numero invece della parte intera, mentre l'1,2% degli allievi risponde di no con la motivazione che 7 è maggiore di 1, per la giustificazione legata esclusivamente al confronto dei centesimi.

Va osservato che il 7,9% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

Di seguito riportiamo un protocollo di risposta considerata mancante, non avendo scelto alcuna opzione, ma dove l'allievo espone un suo ragionamento alquanto bizzarro che verte sul confronto della parte decimale.


La maestra scrive alla lavagna: 2,01 > 1,97
Ha ragione? no perché 2,1 a un decimo mentre 1,97 e = 10,7.
Indica la risposta con la spiegazione corretta.
a) Sì, perché 9>1.
b) Sì, perché 2>1.
c) No, perché 9>0.
d) No, perché 7>1.

Per quanto concerne lo studio dei decimali, va ricordato il lavoro anticipatorio di Guy Brousseau realizzato agli inizi degli anni '80 (1980, 1981). Questi articoli sono fondamentali nell'evoluzione della didattica della matematica, non tanto per l'oggetto in gioco, quanto per la metodologia, detta allora "epistemologia sperimentale". In tali lavori, l'autore definisce l'insieme D dei decimali che considera come ampliamento di N e che servirà poi a passare ai razionali Q; ne studia le caratteristiche algebriche e, brevemente, storiche. Dopo di che mostra un'interessante sequenza didattica.

E2) La maestra chiede ai bambini perché
0,789 > 0,654.
Qual è la spiegazione corretta?

a) Perché 9>4.
b) Perché 8>5.
c) Perché 7>6.
d) Perché 7+8+9 =24, 6+5+4=15 e 24>15.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
4,6	1,7	72,6	13,4	7,7

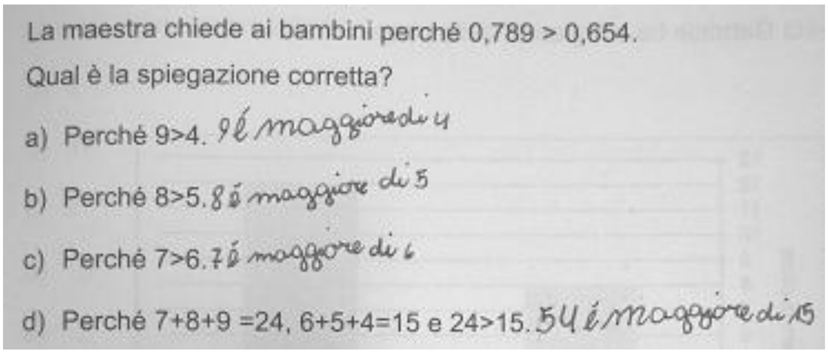
Programmi '84:
Numeri
Introduzione dei numeri con la virgola fino al centesimo.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di leggere, scrivere, confrontare e ordinare numeri naturali e decimali.

Anche questo quesito come E1) riguarda l'ordinamento dei numeri decimali, questa volta con la stessa parte intera. A differenza della precedente domanda, non si richiede di decidere se la relazione tra i due numeri è corretta oppure no, associandola ad una motivazione, ma di spiegare idealmente all'insegnante perché 0,789 > 0,654, scegliendo tra quattro opzioni. Il 72,6% degli allievi individua la spiegazione corretta, un risultato dunque soddisfacente, anche se va osservato che il confronto tra i due numeri decimali si potrebbe facilmente ricondurre al confronto di 789 e 654, dato che la parte intera è la stessa e così anche il numero di cifre decimali e ciascuna cifra della parte decimale di un numero è maggiore di ciascuna cifra della parte decimale dell'altro. Va tenuto in considerazione che il Programma del 1984, vigente durante la somministrazione di tali quesiti, prevedeva per la quarta elementare il confronto della parte decimale fino ai centesimi, e non ai millesimi, come richiesto in questo quesito. Il confronto e l'ordinamento di numeri decimali solitamente comporta l'insorgere di misconcezioni, ampliamente studiate nelle ricerche di didattica della matematica (Fandiño Pinilla, 2005a), secondo le quali l'allievo sembra non riconoscere il valore posizionale delle cifre dopo la virgola, confrontando le parti decimali dei numeri come se fossero numeri interi: i decimali sono spesso concepiti infatti come dei "naturali con la virgola", come ha dimostrato lo stesso Brousseau (1983). Oggi si sa che questa concezione è assai radicata e persiste talvolta fino all'università; essa costituisce un ostacolo didattico piuttosto diffuso alla comprensione dei numeri reali.

Come riferisce Sbaragli (2012): «(…) se si tratta di mettere in ordine 1,2 e 1,15, è noto che la competenza acquisita sui naturali può dare problemi interpretativi; la letteratura segnala casi in cui lo studente afferma: "A parità di parte intera, siccome 15 > 2, allora 1,15 > 1,2". Non sempre si rivela naturale scrivere 1,3 nella forma 1,30; ad impedire la naturalezza di questo passaggio sta anche una regola acquisita precedentemente, in base alla quale aggiungendo uno 0 "in fondo" ad un numero lo si moltiplica per 10; anche in questo caso, una regola valida in N viene erroneamente ed impropriamente estesa ai numeri razionali».

Anche in questo caso non risulta quindi evidente se gli allievi che hanno risposto correttamente abbiano ben inteso in generale il valore delle cifre dopo la virgola o se si siano erroneamente ricondotti ad un caso di confronto tra numeri naturali. Tra le altre opzioni quella più scelta è sorprendentemente la d) (13,4%), dove la giustificazione è legata alla somma delle cifre decimali e non al confronto delle cifre stesse. Questa condizione non è né sufficiente né necessaria per stabilire un confronto tra due numeri decimali, in quanto la cifra in sé ha un valore diverso a seconda della posizione. Forse i bambini si sono lasciati influenzare dalla scomposizione dei numeri basata sul valore posizionale: 0,789 = 0,7 + 0,08 + 0,009, ossia 7 decimi + 8 centesimi + 9 millesimi; analogamente 0,654 = 0,6 + 0,05 + 0,004, ossia 6 decimi + 5 centesimi + 4 millesimi. Ci si può in questo caso domandare se possono aver indotto all'errore ripetute rappresentazioni del numero del tipo 7d + 8c + 9m = ... e 6d + 5c + 4m = ..., non ancora ben comprese da parte degli allievi di questo livello scolastico. Inoltre, il 4,6% degli allievi risponde a), focalizzando l'attenzione sulla posizione che in questa situazione "conta meno", i millesimi, e l'1,7% opta per la risposta b), concentrandosi sui centesimi. Va osservato che ben il 7,7% degli allievi non risponde, nonostante il quesito fosse il quindicesimo del primo fascicolo. Di seguito riportiamo un protocollo classificato come risposta mancante, ma che evidenzia la necessità dell'allievo di esplicitare in un registro verbale le quattro opzioni, sbagliando a scrivere un numero presente nell'ultima. È come se l'allievo avesse bisogno di tradurre il linguaggio matematico in un linguaggio a lui più familiare, specificando il significato dei simboli presenti nel testo.


La maestra chiede ai bambini perché 0,789 > 0,654.
Qual è la spiegazione corretta?
a) Perché 9>4. 9 é maggiore di 4
b) Perché 8>5. 8 é maggiore di 5
c) Perché 7>6. 7 é maggiore di 6
d) Perché 7+8+9 =24, 6+5+4=15 e 24>15. 54 é maggiore di 15

E3) Jacopo ritiene che 0,8 è minore di 0,65.
Indica l'affermazione corretta.

a) Jacopo ha ragione perché 8 è minore di 65.
b) Jacopo si sbaglia perché 8 decimi è maggiore di 65 centesimi.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
19,9	76,7	3,4

Programmi '84:
Numeri
Introduzione dei numeri con la virgola fino al centesimo.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: eseguire, applicare
L'allievo è in grado di leggere, scrivere, confrontare e ordinare numeri naturali e decimali.

Il quesito è analogo ai due precedenti E1) ed E2), ma l'indicazione del concetto di minore è espresso in forma linguistica e non simbolica. In questo caso 0,8 e 0,65 sono due numeri decimali che ben si prestano ad una domanda di confronto tra numeri decimali, in quanto, come già spiegato nell'analisi dei quesiti precedenti, potrebbero portare l'allievo a rispondere in modo errato poiché 8 < 65. Purtroppo in questo caso reputiamo non soddisfacente la costruzione dei distrattori. Come già argomentato nel primo capitolo, la presenza di sole due opzioni di scelta aumenta la percentuale di dare la risposta corretta in modo casuale, inoltre le due risposte corrispondono alla scelta tra “Jacopo ha ragione” oppure “Jacopo si sbaglia”. Una volta individuata la risposta corretta, all’allievo non interessa prendere in considerazione anche la motivazione che, dato l’aspetto di competenza “Argomentare e giustificare” coinvolto, risulterebbe assai più interessante. Si potevano creare distruttori che consentissero di approfondire eventuali misconcezioni legate a un’errata conoscenza del valore posizionale delle cifre nella parte decimale del numero e approfondire la capacità di passare dal registro verbale (8 decimi e 65 centesimi) al registro aritmetico (0,8 e 0,65).

Il quesito registra una buona prestazione degli allievi che rispondono in modo corretto, 76,7% dei casi. Il 19,9% degli allievi sceglie la prima opzione reputando corretta l’affermazione di Jacopo. Il 3,4% corrisponde alla percentuale di risposte mancanti o non valide.

Per quanto riguarda questo argomento, ricordiamo la ricerca di Bonotto (1992) che presenta i risultati di un ampio test effettuato su allievi di V elementare e di I media sulle frazioni e sui numeri decimali; in particolare studia l’ordinamento, giungendo a mostrare come la conoscenza dei numeri naturali è allo stesso tempo supporto e ostacolo a questo apprendimento, come vi sia difficoltà nella gestione del passaggio tra numeri frazionari e decimali e come tra conoscenza delle frazioni e dei decimali vi sia conflitto. Si conferma la necessità di un lungo cammino adattativo nell’apprendimento di questi concetti.

6.2. Situazioni-problema

E4) Per risolvere un problema Giulia ha usato questo calcolo:

27 – 18 = 9

Quale dei seguenti problemi doveva risolvere Giulia?

a) Luisa ha 27 figurine che divide in parti uguali con le sue due sorelle. Quante figurine riceve ogni ragazza?
b) Luisa ha 18 figurine sul suo album e ne riceve altre 9 dalla nonna.
Quante figurine ha in tutto?
c) Luisa ha 27 figurine e ne incolla 18 sul suo album.
Quante figurine le rimangono da incollare?

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
5,1	6,5	82,7	5,7

Programmi ’84:
Problemi
Problemi da inventare partendo da dati, operazioni, grafici, diagrammi forniti agli allievi.

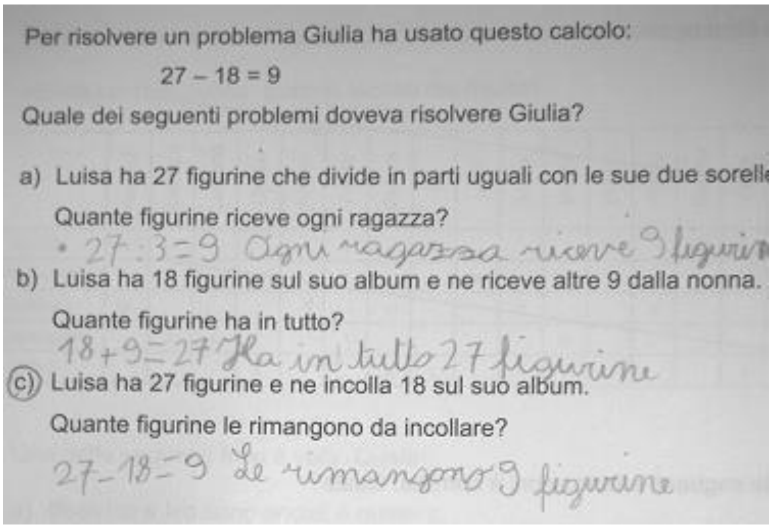
Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: matematizzare, trasporre
L’allievo è in grado di tradurre un problema aritmetico in una sequenza di singole operazioni per poi determinarne una o più soluzioni.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: interpretare, riflettere sui risultati
L’allievo è in grado di esaminare se le rappresentazioni personali o altrui sono utilizzate correttamente e illustrano efficacemente la situazione.

Il quesito richiede la traduzione da un’espressione aritmetica a una situazione-problema espressa in linguaggio verbale che possa essere risolta tramite tale espressione. Per questa ragione, il quesito sarebbe più legato all’aspetto di competenza “Matematizzare e trasporre”, piuttosto che a “Argomentare e giustificare”. Le tre situazioni-problema presentate sono tutte standard e riferite a contesti noti ai bambini. Ognuna di queste situazioni è espressa in modo che il modello formale e il modello intuitivo delle operazioni risolutive coincidano l’un con l’altro, anche perché contengono le parole chiave che gli allievi sono abituati ad attribuire a determinate operazioni per risolvere una situazione, cadendo a volte in errore quando vengono usate in senso diverso da quello più intuitivo: “Luisa ha 27 figurine che *divide in parti uguali* con le sue due sorelle. Quante figurine riceve ogni ragazza?”, “Luisa ha 18 figurine sul suo album e ne riceve *altre* 9 dalla nonna. Quante figurine ha *in tutto*?”, “Luisa ha 27 figurine e ne incolla 18 sul suo album. Quante figurine le *rimangono* da incollare?”. Come riporta la letteratura di riferimento (D’Amore, 2014; Zan, 2012), spesso gli allievi tendono a costruirsi nel tempo comportamenti e atteggiamenti nei confronti della risoluzione dei problemi derivanti dalla lettura delle esperienze vissute, che li porta a utilizzare strategie che sembrano prescindere dalla comprensione del testo e dalla comprensione lessicale. Da questo punto di vista, Sowder (1989) propone una varietà di approcci alternativi praticati dagli allievi: cercare di indovinare l’operazione; guardare i numeri, e da quelli risalire all’operazione “giusta”; provare tutte le operazioni e scegliere quella che dà la risposta più “ragionevole”; cercare “parole chiave” (in tutto vuol dire che bisogna sommare, spende invece è legata a sottrarre ecc.) e altri ancora; strategie che a volte risultano efficaci per le tipologie di problemi che vengono proposte solitamente dai docenti, ma che possono creare atteggiamenti non funzionali a raggiungere competenza nell’affrontare situazioni-problema. Come afferma Zan (2011b) in un suo articolo, il successo di questa strategia «fa sì che tale abitudine si consolidi in un atteggiamento verso il testo dei problemi», abituandoli a una lettura selettiva, che permette di identificare dei dati numerici e delle parole chiave, che aiutano a comprendere come “abbinare” i numeri presenti nel testo.

Per una proposta di lavoro in classe sull’analisi lessicale di una situazione-problema si vedano Fornara, Sbaragli (2013; in corso di stampa).

Le situazioni-problema proposte in questo quesito non si distanziano dalle attese degli allievi, quindi ci si aspetta un'alta percentuale di risposte corrette. In effetti, ben l'82,7% risponde in modo corretto.

Nel seguente protocollo l'allievo riporta diligentemente l'operazione che risolve anche gli altri due problemi e la risposta linguistica per ciascuna situazione.


Per risolvere un problema Giulia ha usato questo calcolo:

27 – 18 = 9

Quale dei seguenti problemi doveva risolvere Giulia?

a) Luisa ha 27 figurine che divide in parti uguali con le sue due sorell[e]

Quante figurine riceve ogni ragazza?

• 27 : 3 = 9 Ogni ragazza riceve 9 figurin[e]

b) Luisa ha 18 figurine sul suo album e ne riceve altre 9 dalla nonna.

Quante figurine ha in tutto?

18 + 9 = 27 Ha in tutto 27 figurine

c) Luisa ha 27 figurine e ne incolla 18 sul suo album.

Quante figurine le rimangono da incollare?

27 – 18 = 9 Le rimangono 9 figurine

Tra coloro che sbagliano, il 6,5% degli allievi sceglie la situazione b), mentre il 5,1% sceglie la a). Coloro che non rispondono o forniscono una risposta da annullare sono il 5,7%.

E5) Luisa ha 6 anni ed è alta 123 cm, la sua amica Carla ha 7 anni ed è alta 1,38 m.
Quale calcolo devo fare per trovare la differenza di altezza tra le due amiche?

a) Fare il calcolo 123 – 1,38 perché 123 è maggiore di 1,38.
b) Fare il calcolo 1,38 – 123 perché i metri sono più grandi dei centimetri.
c) Prima di trovare la differenza devo fare una trasformazione.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
7,4	32,1	56,0	4,5

Programmi '84:
Misure di lunghezza
Applicazione dei numeri decimali alle misure di lunghezza.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito vuole indagare il ragionamento attuato dall'allievo nella risoluzione di un problema inerente la conversione tra unità di misura, per questa ragione rientrerebbe maggiormente nell'ambito "Grandezze e misure", piuttosto che "Numeri e calcolo". La domanda propone tre possibili opzioni di scelta, due contenenti alcuni possibili processi risolutivi espressi in forma aritmetica e la terza più discorsiva. Il quesito registra una bassa percentuale di risposte corrette, poco più della metà degli allievi, mentre ben il 32,1% degli allievi sceglie la seconda giustificazione, che individua l'operazione risolutiva senza tener conto della necessità di eseguire una conversione di unità di misura. Il 7,4% degli allievi sceglie invece l'opzione a) che ignora completamente la presenza delle diverse unità di misura. Già dai risultati emersi nell'analisi dell'ambito "Grandezze e misure", aspetto di competenza: "Eseguire e applicare", si erano rilevate difficoltà nei quesiti legati alle conversioni e alle situazioni-problema che le richiedevano. Una parte degli allievi sembra non dare importanza alle diverse unità di misura. Si può osservare che quasi un terzo dei bambini calcolerebbe la differenza tra 1,38 e 123, nonostante il minuendo sia un numero più piccolo del sottraendo. Questo evidenzia come il bambino sia in grado di intuire la misura più grande, forse influenzato anche dal fatto che la prima è l'altezza di una bambina di 7 anni, anagraficamente più grande, e quindi presumibilmente più alta, e la seconda è l'altezza di una bambina di 6 anni, ma poi non è in grado di associare a queste grandezze un processo risolutivo efficace.

E6) Mio nonno mi ha regalato 10 bustine di figurine e in ogni bustina ci sono 6 figurine.

Quando ho aperto le bustine ho scoperto che  figurine erano doppie mentre  figurine non le avevo ancora.
Quali numeri ci possono essere sotto le macchie?

a) Due numeri qualsiasi.
b) Dipende da quante figurine servono per completare l'album.
c) Due numeri che sommati fanno 60, siccome ho ricevuto 60 figurine.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
13,5	27,7	49,3	9,5

Programmi '84:
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Matematizzare, trasporre
L'allievo è in grado di interpretare situazioni-problema concrete producendo esempi di risultati possibili su cui riflettere.

E7) Faccio la collezione delle sorprese contenute nei salatini.

L'ultima volta che le ho contate due mesi fa erano .
Oggi ne ho 320 e quindi di più rispetto a 2 mesi fa.
Quali numeri possono esserci sotto la macchia?

a) Un numero qualsiasi basta che sia minore di 320.
b) Un numero qualsiasi basta che sia maggiore di 320.
c) Non si può dire perché non si sa quante sorpresine mancano per completare la collezione.

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
56,9	5,8	30,9	6,4

Programmi '84:
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Matematizzare, trasporre
L'allievo è in grado di interpretare situazioni-problema concrete producendo esempi di risultati possibili su cui riflettere.

I due quesiti chiedono di capire quale delle tre opzioni esposte sia coerente con il testo del problema. Potrebbero quindi rientrare maggiormente nell'aspetto di competenza "Matematizzare e trasporre" piuttosto che "Argomentare e giustificare". L'obiettivo dunque è quello di mettere alla prova la capacità critica dell'allievo, che costruisce ragionamenti e formula ipotesi. Una competenza alquanto importante e complessa, che necessita di tempo e ricchezza di proposte per poter essere mobilitata. Per raggiungere tale competenza è fondamentale orchestrare discussioni e momenti di confronto in classe sui ragionamenti condotti dagli allievi, dunque sui processi piuttosto che sui prodotti, con l'obiettivo di sviluppare le capacità di critica e di giudizio e l'attitudine a comprendere argomentazioni e punti di vista diversi dai propri (Bartolini Bussi, Boni, 1995).

Entrambi i quesiti richiedono di valutare l'attinenza con la situazione descritta (che mette in gioco aspetti di comprensione del testo) e con la richiesta, in questo caso: "Quali numeri ci possono essere sotto le macchie?". I risultati in entrambi i casi non sono soddisfacenti, il 49,3% di risposte corrette al primo quesito e il 56,9% al secondo, leggermente migliori dunque in quest'ultimo caso, probabilmente perché si chiedeva di individuare un solo numero, invece della relazione di due numeri.

Nel quesito E6), tra coloro che sbagliano, il 27,7% pensa che per rispondere sia necessario sapere quante figurine servono per completare l'album. In questo caso non si chiede di svolgere nessuna operazione ma di indagare sulla coerenza del testo, attività che probabilmente gli allievi non sono abituati a fare. Relativamente al testo sottolineiamo che la presenza della parola "doppie" può costituire un ostacolo, in quanto i bambini potrebbero attribuirlo alle figurine delle bustine ripetute due volte, invece che alla tipologia di figurine dentro le bustine. Il 13,5% degli allievi risponde "due numeri qualsiasi". In questo caso può aver influito il fatto che i due numeri non si vedono, sono nascosti, e quindi per l'allievo qualsiasi numero può essere inserito sotto le macchie, dimostrando un'incomprensione del testo e una incapacità di giudizio e critica. Sull'incomprensione dei testi relativi a situazioni-problema si veda Zan (2012). Diversi allievi lasciano in bianco o forniscono una risposta non valida, ben il 9,5%.

Il testo del quesito E7) presenta due dati numerici, uno dei quali non serve per la risoluzione (2 mesi), un numero espresso in lettere (due), anche questo inutile, e l'indicazione "di più rispetto a". Tra coloro che rispondono in modo scorretto, il 30,9% sceglie l'opzione c) secondo la quale non si può dare una risposta. In questo caso gli allievi probabilmente si sono lasciati condizionare dal fatto che il problema non ammette un'unica soluzione numerica, così come succedeva nell'item E6), ma tante possibili a patto che siano minori di 320. Il 5,8% degli allievi sceglie la seconda opzione, mentre il 6,4% fornisce risposte mancanti o non valide.

E8) Adriano ha la metà delle figurine che ha Paola. Insieme hanno 48 figurine. Quante figurine ha Adriano?
Indica la risposta con la spiegazione corretta.

a) Adriano ha la metà delle figurine. Ne ha quindi 48 : 2 = 24.
b) Per ogni figurina che ha Adriano, Paola ne ha due. Quindi Adriano ne ha 48 : 3 = 16.
c) Paola ha il doppio delle figurine di Adriano, quindi Adriano ne ha 12 e Paola 24.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
47,2	20,4	14,6	17,8

Programmi '84:
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.

Il problema si riferisce a un insieme numerico ampiamente dominato in quarta (numeri naturali di due cifre entro il 50); la difficoltà risiede nel comprendere il testo, sapere rappresentare la situazione e riuscire a comprendere le relazioni numeriche in gioco. Il quesito viene risolto correttamente solo dal 20,4% degli allievi. I risultati deludenti che si registrano in questa tipologia di problemi richiedono una riflessione. Lo studente che legge superficialmente il quesito si sofferma sulle parole “metà”, “insieme”, “48 figurine”. Con queste informazioni spesso gli allievi prendono i numeri presenti nel testo e deducono l’operazione risolutiva senza sentire la necessità di comprendere il significato semantico della situazione proposta. In questo caso “metà” riporta alla divisione per due, così il 47,2% ha scelto la prima delle tre risposte, affidandosi solo ad aspetti intuitivi. Come afferma Zan (1998): «Nel risolvere un problema scolastico molti bambini sembrano procedere combinando numeri: secondo strategie suggerite da parole presenti nel testo, secondo schemi risolutivi interiorizzati nella loro precedente esperienza scolastica, a caso». Dai risultati ottenuti pare che i bambini si trovino davanti ad una situazione problematica diversa da quella che abitualmente incontrano in classe. Come affermano D’Amore e Fandiño Pinilla (2013), esistono “situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti” e “situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese”.

Per rispondere a questo quesito sarebbe stata utile una rappresentazione della situazione in modo da comprendere che le 48 figurine dovevano essere divise per 3 e non per 2. In generale, non è semplice per l’allievo utilizzare un dato non esplicitato nel testo, perché in qualche modo non si sente autorizzato a prendere in cosiderazione numeri non presenti direttamente nel problema. L’utilizzo spontaneo e consapevole di forme di rappresentazione grafiche potrebbe contribuire alla comprensione delle relazioni numeriche espresse dal testo di un problema, ovviamente considerando eventuali condizionamenti percettivi che, talvolta, possono ostacolare la comprensione, anziché giocare a suo favore. Ogni registro semiotico (verbale, iconico, simbolico, …) ha pregi e difetti che vanno attentamente valutati per far sì che il passaggio dall’uno all’altro (sicuramente auspicabile e produttivo nel processo di risoluzione di un problema) avvenga valorizzando le potenzialità di ciascuno. Si tratta di coinvolgere gli allievi in riflessioni di carattere metacognitivo che evidenzino il significato e il senso di ciascuna forma di rappresentazione e le possibili relazioni tra esse. Operare conversioni fra diversi registri è un indicatore significativo di competenza. In quest’ottica, a partire da questo quesito l’insegnante potrebbe valutare la possibilità di chiedere ai bambini di rappresentare la situazione esposta nella domanda e di indagare la bontà delle varie rappresentazioni.

Tra coloro che forniscono una risposta sbagliata, il 14,6% degli allievi trasforma correttamente l’affermazione “Adriano ha la metà delle figurine che ha Paola” in “Paola ha il doppio delle figurine di Adriano”, operando un procedimento inverso, ma trascura la condizione che le figurine di Adriano e Paola in tutto sono 48 e quindi non possono essere 12 per Adriano e 24 per Paola, come specifica la terza opzione.

Inoltre, ben il 17,8% degli allievi non ha fornito alcuna risposta oppure ha scelto più di una opzione invalidando la domanda. Va tenuto presente che questo era il 51-esimo quesito del primo fascicolo.

E9) Per il mio compleanno ho invitato 16 amici e la mamma ha preparato 8 torte. La mamma divide ogni torta in 4 fette. Con quale di questi calcoli trovo quante fette ci saranno in tutto?

a) 8 : 4
b) 8 – 4
c) 16 : 4
d) 8 × 4

Risposta corretta: d

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
21,3	2,6	26,9	38,5	10,7

Programmi '84:
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: matematizzare, trasporre
L'allievo è in grado di tradurre un problema aritmetico in una sequenza di singole operazioni per poi determinare una o più soluzioni.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito richiede di individuare il processo risolutivo di una situazione-problema proposta, sarebbe quindi più idoneo per l'aspetto di competenza "Matematizzare e trasporre" piuttosto che "Argomentare e giustificare". Il testo contiene tre dati numerici, non tutti utili alla risoluzione, e due parole che possono influenzare il processo risolutivo degli allievi: "divide" e "in tutto". La prima parola potrebbe indurre l'allievo a scegliere una risposta con la divisione (8 : 4 oppure 16 : 4), e i risultati lo confermano, la seconda conduce tradizionalmente all'addizione o alla moltiplicazione. Solo il 38,5% degli allievi ha scelto l'opzione giusta che coinvolge la moltiplicazione.

Quasi un bambino su due ha optato per la divisione, con una leggera preponderanza verso l'operazione 16 : 4 (26,9%), rispetto a 8 : 4 (21,3%), forse per il fatto che 16 era il primo dato numerico che si incontra leggendo il testo o semplicemente quello più grande. Il 2,6% riconosce nella sottrazione l'operazione risolutrice.

Sarebbe stato interessante avere come distrattore anche l'operazione di addizione con tutti e tre i numeri del testo (16 + 8 + 4), in modo da capire se nelle decisioni di qualche studente giochi un ruolo fondamentale una convinzione molto diffusa tra gli allievi, secondo cui i dati numerici presenti nel testo vanno considerati tutti, magari una ed una sola volta, e possibilmente nell'ordine in cui compaiono.

È da sottolineare un'alta percentuale di risposte mancanti o non valide (10,7%). Il quesito era il 45-esimo di quelli somministrati nel primo fascicolo.

6.3. Addizioni

E10) Se a un numero aggiungo 2 , ottengo 440.

Sottolinea l'affermazione corretta.

a) Il numero iniziale era un numero qualsiasi.
b) Il numero iniziale era sicuramente minore di 440.
c) Il numero iniziale era sicuramente maggiore di 440.
d) Il numero iniziale era sicuramente 420.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
4,6	67,0	1,8	22,9	3,7

Programmi '84:
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; anche con l'impiego di numeri decimali, limitatamente alle prime tre operazioni.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito è analogo a E7), il ragionamento da seguire è lo stesso, anche se in questo caso non è presente una vera e propria situazione problematica, ma si tratta nello specifico di un contesto puramente astratto, mentre in E7) era descritta una situazione più contestualizzata nel reale. Nonostante questo quesito abbia 4 possibili scelte, mentre E7) ne aveva solo 3, si registra un maggiore successo, forse dovuto ad un testo più semplice e immediato a livello linguistico.

Il 67% degli allievi risponde correttamente, mentre il 22,9% interpreta in modo inesatto la presenza della macchia sul numero, intesa come 0. La domanda diventa dunque "Se a un numero aggiungo 20, ottengo 440", il cui risultato è determinato univocamente. È in effetti molto tipico riscontrare l'esigenza da parte degli allievi di assegnare un valore numerico univoco, quando la situazione è aritmeticamente aperta. Notiamo dunque una difficoltà degli allievi a gestire problemi con più soluzioni. Le risposte a) e c) sono invece state scelte rispettivamente dal 4,6% e 1,8% degli allievi. Il 3,7% degli allievi fornisce risposte mancanti o non valide.

Un lavoro in classe a partire dai quesiti E6), E7), E10), dove la presenza di dati nascosti induce l'allievo a mettere in atto ragionamenti che generalizzano una situazione, può essere un preludio alla formazione del pensiero astratto a supporto di quello concreto. Tali situazioni possono essere anche proposte in contesti diversi, tenendo conto delle relazioni esistenti tra pensiero astratto ed esperienza concreta. Nonostante esista un legame profondo tra conoscenza ed esperienza, non è affatto banale né scontato coniugare questo legame per la matematica. Per costruire il pensiero matematico può essere necessario ad un certo punto abbandonare il ricorso ad esperienze e modelli concreti sostituendoli con considerazioni sul linguaggio e sul significato. Molto rilevanti sono le osservazioni di Fischbein (1981) su questo argomento. Egli osserva che «l'insegnamento della struttura per mezzo di modelli intuitivi è lontano dall'essere riuscito a costruire una base matematica solida per gli scolari delle classi elementari» e prosegue «i modelli concreti devono essere concepiti di modo tale che, pur fornendo al bambino il sostegno intuitivo di cui egli ha bisogno, gli offrano anche la possibilità di liberarsi da questo appoggio stesso. Il materiale concreto utilizzato deve essere tale da suscitare domande alle quali il bambino possa rispondere ricorrendo al suo pensiero, ai suoi schemi logici, alla sua fantasia. Un materiale didattico che non suscita delle domande o che risponde da sé a quelle che il bambino si può porre per conto suo, non è di nessuna utilità.

Peggio ancora, rischia di bloccare e di soffocare il pensiero matematico del bambino». Fischbein insiste sull'importanza della domanda, sulla necessità di sollecitare il bambino ad immaginare e a imparare a giustificare logicamente le sue risposte. Egli inoltre suggerisce di non usare oggetti sensibili qualsiasi, ma "modelli generativi" che agevolino il pensiero produttivo. La necessità di separarsi dal modello concreto per produrre un concetto matematico astratto è legata sia al modo con cui l'insegnante provoca e sostiene l'attività degli allievi, sia alle esperienze che propone.

E11) Maria sostiene che 123,4 + 256,32 = 379,36.
Leggi le seguenti affermazioni e indica quella corretta.

a) Maria ha ragione perché 123 + 256 = 379 e 0,4 + 0,32 = 0,36.
Quindi 123,4 + 256,32 = 379,36.
b) Maria ha sbagliato perché 123 + 256 = 379 ma 0,4 + 0,32 = 0,72.
Quindi 123,4 + 256,32 = 379,72.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
49,3	33,9	16,8

Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite; approfondimento del concetto delle due operazioni e delle relative tecniche di calcolo, applicandole anche all'estensione del campo numerico oltre il migliaio e ai numeri con la virgola.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito richiede di calcolare la somma di numeri decimali, indicando quale è corretta. Non è evidente dunque l'obiettivo legato a valutare la capacità argomentativa o giustificativa dell'allievo, in quanto sono presenti solo due opzioni di scelta che riportano due risultati differenti. L'allievo dunque non è costretto a mettere in atto un particolare ragionamento per capire quale delle giustificazioni espresse nelle due risposte è corretta. È sufficiente che l'allievo individui il risultato corretto della somma per rispondere, eppure risponde correttamente solo il 33,9% degli allievi. Nello specifico quasi un bambino su due (49,3%) ha scelto la prima opzione, dando dunque ragione a Maria, che effettua un calcolo sbagliando a considerare il valore posizionale delle cifre nella parte decimale dei numeri, ossia sbaglia nella lettura della parte decimale calcolando 4 + 32 invece di 40 + 32. Sarebbe opportuno, particolarmente in casi di questo tipo, dove la domanda è a risposta chiusa e le possibili scelte sono solo due, proseguire l'indagine, interpellando direttamente i bambini e indagando sulla loro effettiva capacità di sommare numeri decimali. Gli allievi, infatti, potrebbero rispondere a) solo influenzati dal fatto di voler dare ragione a ciò che è affermato nel testo del problema. Spesso capita che gli allievi, di fronte all'enunciato di un problema, non si sentono autorizzati e non sono abituati a mettere in discussione la validità di quanto affermato e proposto dall'insegnante perché ripongono cieca fiducia in lui, anche se in questo caso è proprio chiesto esplicitamente questo nel testo. Questo tipo di atteggiamento rientra nel contratto didattico, la cui rottura può aprire le porte all'apprendimento. In questo senso il cosiddetto "paradosso della credenza" è particolarmente importante da mettere in atto da parte del docente: «Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos'è sapere (…) abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione» (Clanché, 1994).

Il 16,8% degli allievi non fornisce la risposta o fornisce una risposta non valida. Si tenga presente che il quesito è il 48-esimo di quelli somministrati nel primo fascicolo.

6.4. Moltiplicazioni

E12) Nicola pensa che 6,5 × 4 = 24,20.

a) Nicola ha ragione perché 6 × 4 = 24 e 5 × 4 = 20. Quindi 6,5 × 4 = 24,20.
b) Nicola si sbaglia perché 6 × 4 = 24 e 0,5 × 4 = 2. Quindi 6,5 × 4 = 26.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
50,5	46,1	3,4

Programmi ’84:
Operazioni
Tecnica della moltiplicazione: con numeri decimali sia al moltiplicando che al moltiplicatore (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L’allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L’allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito è strutturato in modo molto simile al precedente, dove al posto dell’addizione si ha come operazione aritmetica la moltiplicazione. Anche in questo caso la domanda è a scelta multipla ma con solo due opzioni possibili e ha come obiettivo quello di valutare la capacità degli allievi di operare con i numeri decimali in modo consapevole.

L’allievo può rispondere basandosi solamente sul risultato senza tener conto dell’argomentazione esposta nelle due risposte, per questo motivo pensiamo che non sia bene formulata, essendo nell’aspetto di competenza “Argomentare e giustificare”. La percentuale di risposte corrette è del 46,1%, maggiore rispetto al quesito precedente, mentre la percentuale di risposte errate (50,5%) è paragonabile, per cui vale tutto il discorso già affrontato. In questo caso la percentuale di risposte mancanti/non valide è molto contenuta (3,4%), essendo il quesito il 18-esimo proposto nel fascicolo. Questo a testimonianza di quanto detto più volte: le performance degli allievi sono profondamente influenzate dall’ordine delle domande, più il quesito si trova verso la fine del fascicolo più la percentuale di risposte mancanti in genere cresce, a causa dell’alto numero di quesiti posti.

E13) Sabrina sostiene che il risultato di una moltiplicazione di due numeri è sempre maggiore di ciascuno di loro e fa un esempio:
8 × 4 = 32 e 32 è maggiore sia di 8 che di 4.
Quale di questi esempi dimostra invece che Sabrina si sbaglia?

a) 0,5 × 10 =
b) 4,2 × 10 =
c) 7 × 10 =
d) 10 × 10 =

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
42,6	18,8	8,0	9,5	21,1

Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione: ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni; (…).
Calcoli mentali
applicazione di particolari strategie di calcolo: ad esempio: × 10, × 100, × 1000 (…).

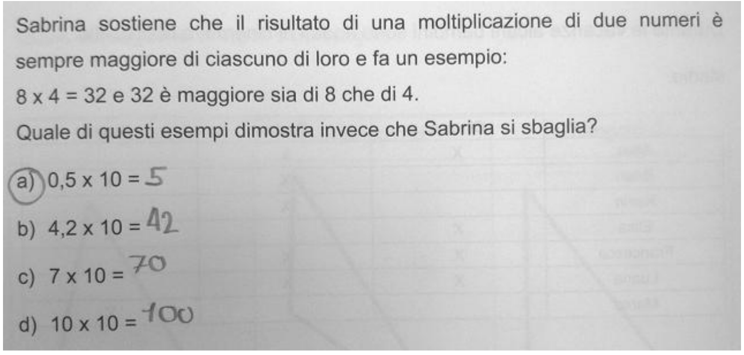
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito pone l'accento su una diffusa misconcezione seconda la quale "la moltiplicazione accresce sempre". Nel testo si fa osservare che la moltiplicazione 8 × 4 fornisce un risultato maggiore di entrambi i fattori. Questo in realtà succede solo quando entrambi i fattori sono maggiori di 1. Una convinzione analoga è quella secondo cui la "divisione diminuisce sempre".

Nei primi anni di scuola elementare, l'allievo incontra l'operazione di moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali. Tale operazione, in questo contesto, fa "aumentare i valori", ossia fa sì che il prodotto di due fattori sia sempre maggiore o al più uguale a ciascuno dei fattori. La formazione prematura di un modello concettuale di moltiplicazione quando si ha a disposizione solo l'insieme N dei numeri naturali genera spesso misconcezioni quando si passa ad un altro insieme numerico, in questo caso quello dei razionali Q. Risulterebbe allora utile didatticamente lasciare immagini in continua evoluzione cercando di non creare troppo presto modelli forti e stabili, per riuscire successivamente ad ampliarle nel tentativo di costruire un modello di concetto di moltiplicazione in modo ottimale, che tenga conto dei successivi ampliamenti ai numeri razionali (D'Amore, Sbaragli, 2005).

L'insegnante, per evitare di creare nella mente degli allievi la misconcezione basata sulla convinzione che "la moltiplicazione sempre accresce" (o: "il prodotto è sempre maggiore o uguale di ciascun fattore"), può aver messo in guardia gli allievi sul fatto che questo non sempre si verifica. L'insegnante può aver fatto notare fin dall'inizio che, in una moltiplicazione tra due numeri, esistono altri fattori oltre ai naturali che danno un prodotto minore di almeno uno dei fattori e può aver evitato di rafforzare tale attesa intuitiva non introducendo in modo univoco e generalizzato immagini figurali che rinforzano tale convinzione (raffigurazioni schematiche dei tipi "schieramento" o "ad albero") (D'Amore, 1999).

Oltre a questo fatto sottolineiamo che il quesito richiede una profonda comprensione delle questioni matematiche sottese. L'allievo, infatti, deve essere in grado di capire lo stimolo evidenziato nel testo (ricordiamo che la presenza del connettivo sia… sia crea spesso difficoltà interpretative), deve interrogarsi sul fatto che non è sempre vero quello che Sabrina afferma (e se in classe la questione non è mai stata sollevata, non è banale per l'allievo pensarci e convincersi di questo fatto), inoltre deve calcolare il risultato di tutte e quattro le moltiplicazioni, o meglio (e auspicabile) capire che la moltiplicazione di un numero per un numero < 1, restituisce un prodotto inferiore ad almeno uno dei due fattori. Con moltiplicazioni di più di due fattori, tutto può succedere: 0,1 × 0,2 × 3 = 0,06 ma 0,1 × 100 × 1000 = 10000.


Sabrina sostiene che il risultato di una moltiplicazione di due numeri è sempre maggiore di ciascuno di loro e fa un esempio:

8 x 4 = 32 e 32 è maggiore sia di 8 che di 4.

Quale di questi esempi dimostra invece che Sabrina si sbaglia?

a) 0,5 x 10 = 5

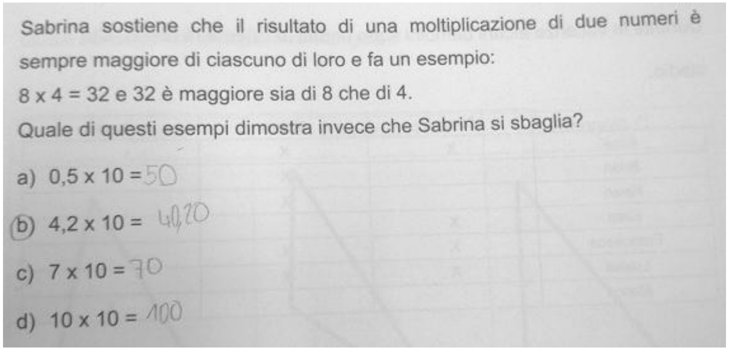
b) 4,2 x 10 = 42

c) 7 x 10 = 70

d) 10 x 10 = 100

Il 42,6% degli allievi risponde correttamente, alcuni facendo anche riferimento ai risultati di ciascuna operazione, come evidenzia il protocollo qui fianco.

Tra coloro che sbagliano, il 18,8% degli allievi sceglie la seconda operazione, ossia 4,2 × 10. Dal seguente protocollo deduciamo errori di calcolo e un'incomprensione nella consegna. L'allievo infatti riporta i risultati a fianco di ogni moltiplicazione, sbagliando i primi due, proprio quelli legati alla presenza di numeri decimali. Nonostante questo, se avesse capito fino in fondo la richiesta nel testo non avrebbe dovuto rispondere, stando ai risultati trovati; tra quelli scritti non esistono infatti prodotti inferiori o uguali a entrambi i fattori.


Sabrina sostiene che il risultato di una moltiplicazione di due numeri è sempre maggiore di ciascuno di loro e fa un esempio:

8 x 4 = 32 e 32 è maggiore sia di 8 che di 4.

Quale di questi esempi dimostra invece che Sabrina si sbaglia?

a) 0,5 x 10 = 50

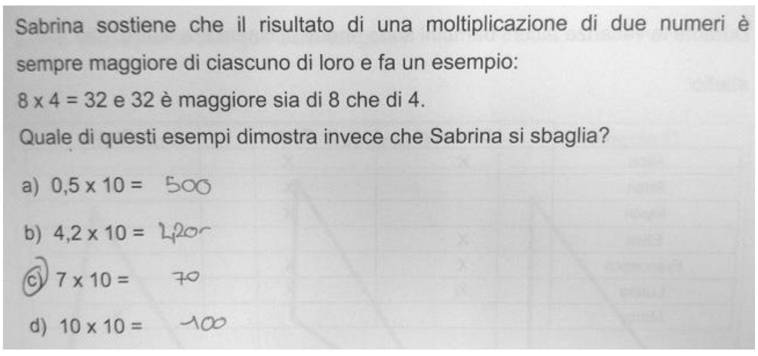
b) 4,2 x 10 = 40,20

c) 7 x 10 = 70

d) 10 x 10 = 100

Il 9,5% degli allievi risponde d), mentre l'8% ha risposto c).

Di seguito riportiamo un protocollo che mostra la ragione per cui l'allievo ha scelto la risposta sbagliata. Di fianco ad ogni moltiplicazione è stato calcolato il risultato e osserviamo che i primi due prodotti sono errati. L'allievo non è in grado di eseguire la moltiplicazione per 10 in presenza di numeri decimali, difficoltà che era stata evidenziata anche dai risultati di altri quesiti [si veda ad esempio il quesito D12)]. Presumibilmente l'allievo tratta i fattori 4,2 e 0,5 come se fossero rispettivamente 42 e 50 riconducendosi dunque al caso di numeri naturali. Inoltre notiamo che gli allievi ancora una volta hanno preferito ragionare in modo operativo piuttosto che sfruttare proprietà dei numeri o delle operazioni.


Sabrina sostiene che il risultato di una moltiplicazione di due numeri è sempre maggiore di ciascuno di loro e fa un esempio:

8 x 4 = 32 e 32 è maggiore sia di 8 che di 4.

Quale di questi esempi dimostra invece che Sabrina si sbaglia?

a) 0,5 x 10 = 500

b) 4,2 x 10 = 420

c) 7 x 10 = 70

d) 10 x 10 = 100

In questo caso l'allievo avrebbe potuto anche accorgersi che moltiplicare 10 per 0,5 significa moltiplicare 10 per 1/2 e quindi dividere 10 per 2. Questi trattamenti, in questo caso relativi all'oggetto 0,5 sono sicuramente difficoltosi per l'allievo e vanno educati in modo specifico.

Il quesito registra un'alta percentuale di risposte mancanti/non valide (21,1%), giustificata in parte dal fatto che è il 39-esimo del primo fascicolo e in parte dal fatto che forse alcuni allievi non hanno ancora maturato capacità critiche adeguate, necessarie per rispondere a una tale domanda.

E14) Sai che 175 × 58 = 10150.
Cosa puoi dire sul risultato del calcolo 175 × 59?

a) Il risultato è 10150 + 1 perché ho aumentato di 1 il 58.
b) Il risultato è 10150 + 58 perché ho preso il 58 una volta in più.
c) Il risultato è 10150 + 175 perché ho preso il 175 una volta in più.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	**b**	**c**	**Mancante/ Non valida**
26,9	20,5	26,9	25,7

Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione: ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni; (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito è stato posto in modo analogo a D8) e D9), all'interno dell'aspetto di competenza "Eseguire e applicare", stesso ambito di competenza. Gli allievi potrebbero rispondere stimando o calcolando esattamente il risultato della moltiplicazione 175 × 59, deducendo quindi la risposta, oppure pensando al fatto che il 175 è ripetuto una volta in più, quindi il risultato della moltiplicazione differirà di 175, oppure applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$175 \times 59 = 175 \times (58 + 1) = 175 \times 58 + 175 \times 1 = 175 \times 58 + 175 = 10150 + 175.$

L'allievo può applicare la strategia e il ragionamento a lui più congeniale e adatto. In molti casi gli alunni privilegiano un approccio procedurale, perdendosi poi nella deriva dei calcoli e mostrando di possedere lacune concettuali.

I risultati lo mostrano, circa 1 studente su 4 sceglie la risposta giusta (26,9%). La stessa percentuale di allievi opta per la prima risposta, lasciandosi ingannare dalla differenza tra 58 e 59; la risposta b) è scelta dal 20,5% degli allievi. Anche in questo caso il fatto che il quesito fosse uno degli ultimi (il 54-esimo) del primo fascicolo può avere influito sull'alta percentuale di risposte mancanti o non valide (25,7%).

E15) Paolo sostiene che il risultato di una moltiplicazione di due numeri maggiori di 0 è sempre un numero diverso da ognuno di loro e fa un esempio:
4 × 5 = 20 e 20 è diverso da 4 e da 5.
Fai un esempio per mostrare che Paolo si sbaglia.
………..

Risposta corretta:
Qualsiasi esempio di moltiplicazione in cui uno dei due fattori è uguale al prodotto

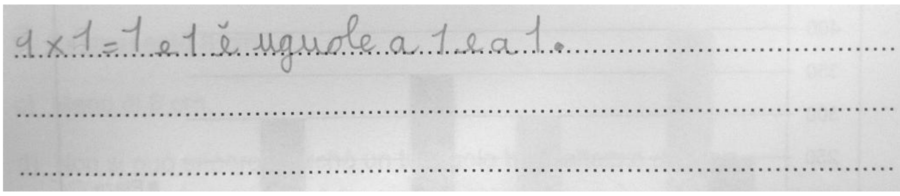
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate				Mancante/ Non valida
Riporta un esempio corretto oppure una giustificazione generale	Riporta un esempio errato	Non riporta un esempio	Afferma che Paolo non si sbaglia	Altro	
21,2	16,5	7,7	2,0	1,9	50,7

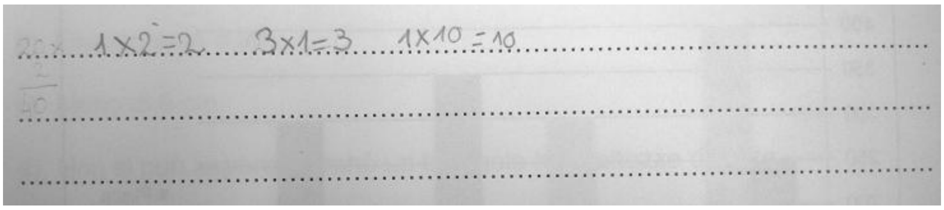
Programmi ’84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione: relazione tra moltiplicazione e divisione. (Ad esempio: operatori diretti e inversi, catene di operatori, analisi della tavola di moltiplicazione e di divisione; diverso ruolo dello zero e dell’uno ecc.).

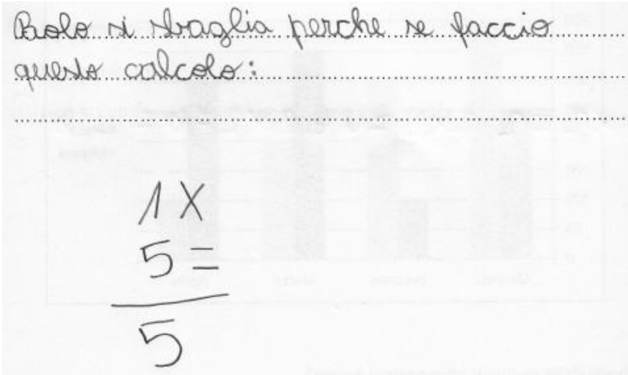
Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L’allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L’allievo è in grado di argomentare per sostenere una tesi in ambito aritmetico.

Il quesito, uno dei pochissimi tra i 120 totali a risposta aperta articolata, richiede la giustificazione di un’affermazione sbagliata. L’intento è di verificare se l’allievo sa controbattere a un’affermazione errata, fornendo un controesempio. Il quesito è risultato particolarmente difficile, vista la percentuale di successi, solo il 21,2% di risposte corrette. Tra le risposte giuste abbiamo identificato tre categorie: coloro che riportano come esempio 1 × 1 = 1 (7%);



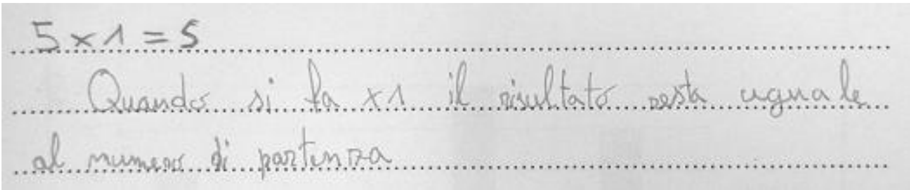
coloro che riportano un esempio del tipo n × 1 = n, con n numero naturale maggiore di 1 (12,7%);

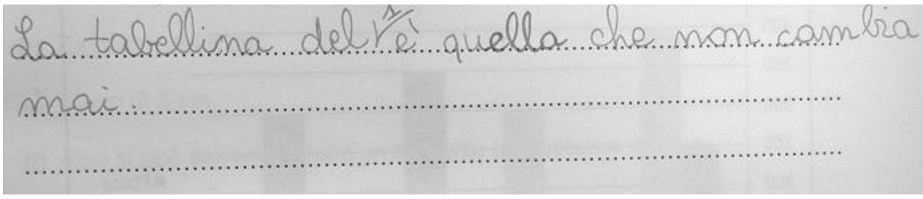


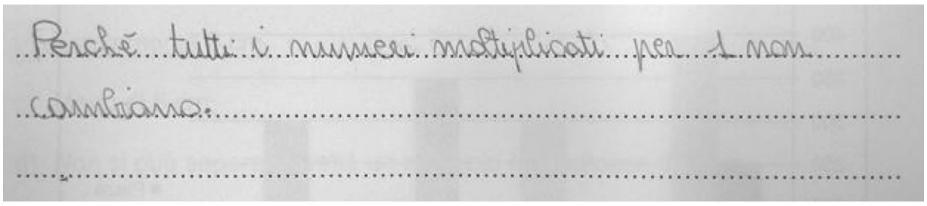

Paolo si sbaglia perche se faccio questo calcolo:

1 X
5 =
5

e coloro che forniscono una giustificazione discorsiva (1,5%), come ad esempio le seguenti:


5 × 1 = 5
Quando si fa × 1 il risultato resta uguale al numero di partenza

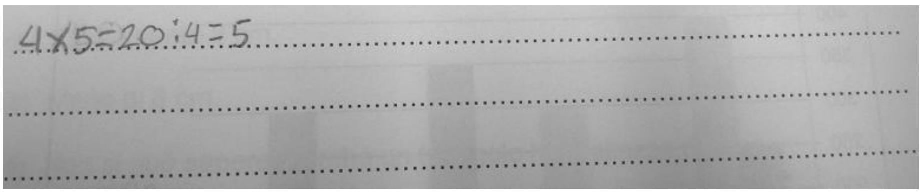

La tabellina del 1 è quella che non cambia mai.


Perchè tutti i numeri moltiplicati per 1 non cambiano.

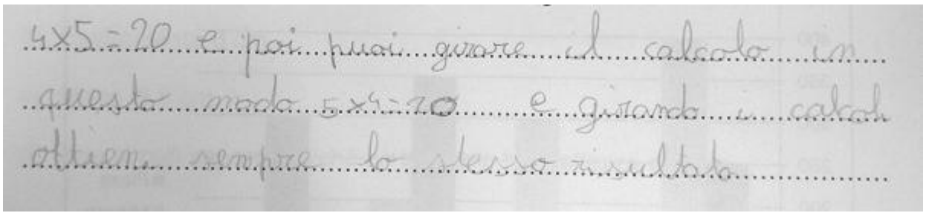
Queste argomentazioni testimoniano la capacità dell'allievo di generalizzare una certa proprietà ed è certamente apprezzabile in un bambino di scuola elementare. Anche se non sarebbe necessario, questi alunni non riportano solo un esempio, bensì una classe di esempi, ossia tutte le moltiplicazioni dove almeno uno dei due fattori è 1. Osservazioni di questo tipo in classe rappresentano il preludio allo sviluppo della generalizzazione algebrica.

Dall'analisi dei protocolli emerge che il quesito risulta poco chiaro per alcuni allievi, infatti il 16,5% riporta un esempio sbagliato, che evidenzia un'incomprensione dell'affermazione di Paolo.

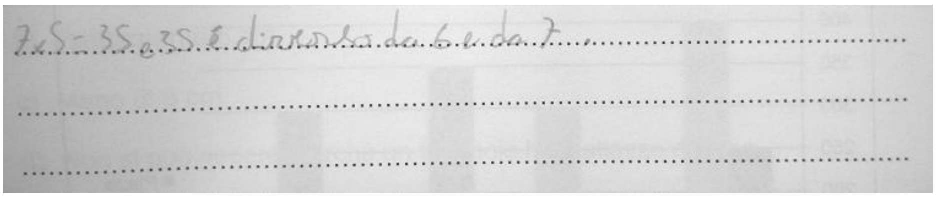
Nel seguente protocollo l'allievo riprende l'esempio di Paolo, mostrando la correttezza del risultato con la prova, oltretutto non rispettando il significato di uguaglianza:


4×5=20:4=5

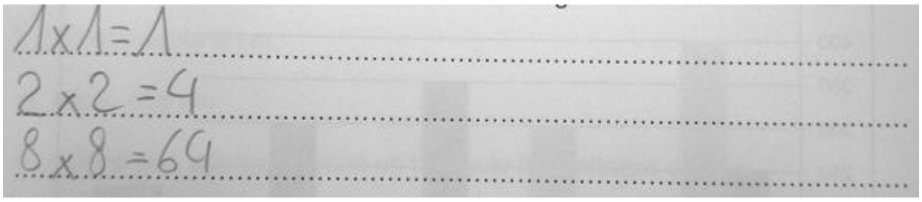
Il seguente allievo invece interpreta l'affermazione del testo come un'applicazione della proprietà commutativa della moltiplicazione.


4x5=20 e poi puoi girare il calcolo in questo modo 5x4=20 e girando i calcoli ottieni sempre lo stesso risultato

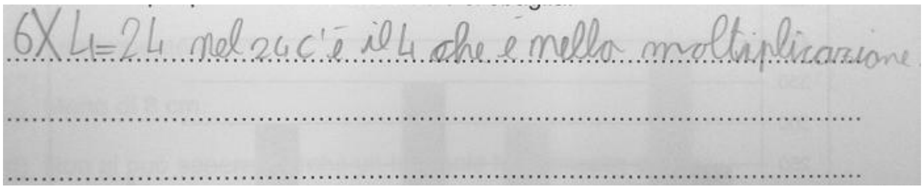
Invece, il seguente riporta un esempio che conferma l'affermazione di Paolo, fraintendendo dunque la richiesta del quesito.

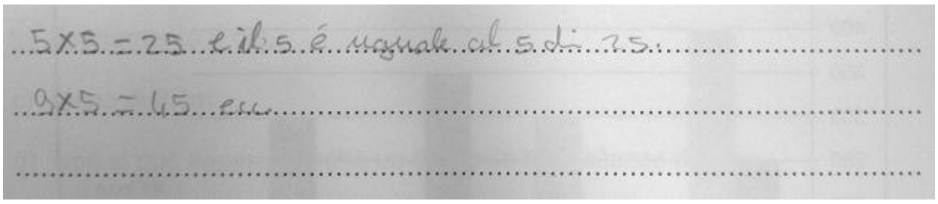

7x5=35 e 35 è diverso da 6 e da 7

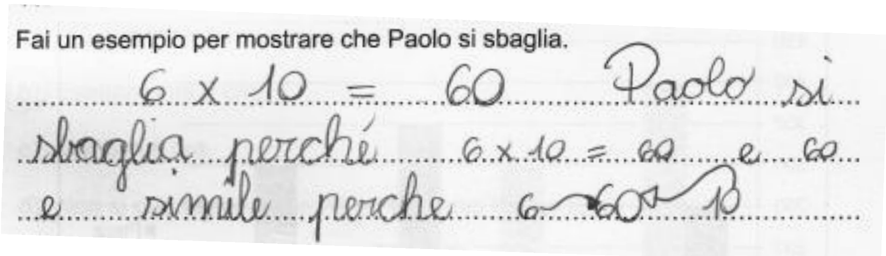
Nel seguente protocollo l'allievo riporta esempi dove i due fattori sono uguali tra di loro, e non al prodotto. Anche in questo caso abbiamo un'incomprensione della richiesta.

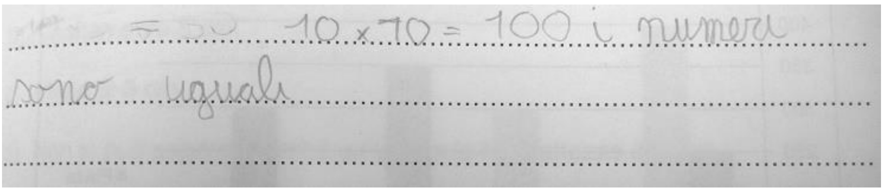

1x1=1
2x2=4
8x8=64

Così come nei seguenti protocolli, dove l'allievo riporta esempi in cui compare nel prodotto una cifra uguale a uno dei due fattori.

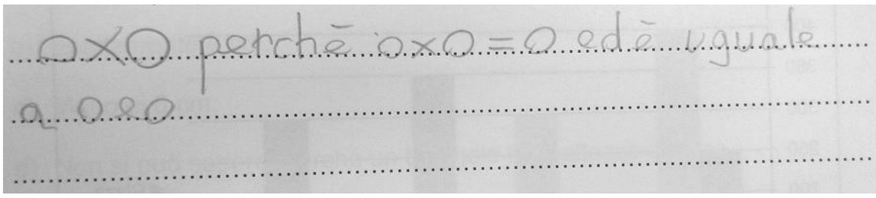

6X4=24 nel 24 c'è il 4 che è nella moltiplicazione

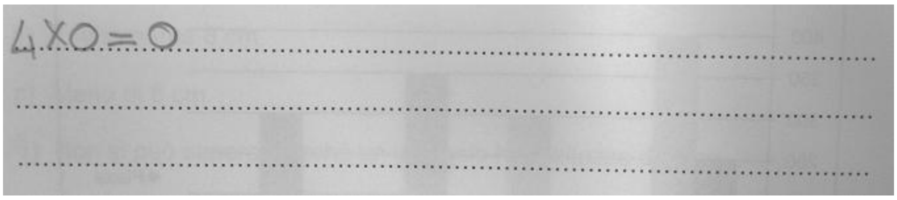

5X5=25 e il 5 è uguale al 5 di 25.
9X5=45 ecc


Fai un esempio per mostrare che Paolo si sbaglia.
6 x 10 = 60 Paolo si sbaglia perché 6 x 10 = 60 e 60 e simile perche 6 60 10

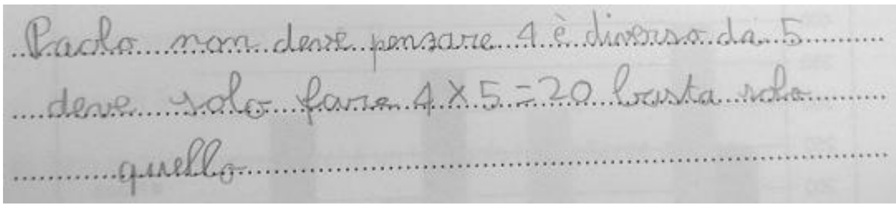


Alcune risposte fanno riferimento alla moltiplicazione per 0. Effettivamente un qualsiasi numero moltiplicato per 0 restituisce come prodotto 0, ma nel testo era specificata la natura dei due fattori (“due numeri maggiori di 0”). Questo esclude le seguenti risposte:

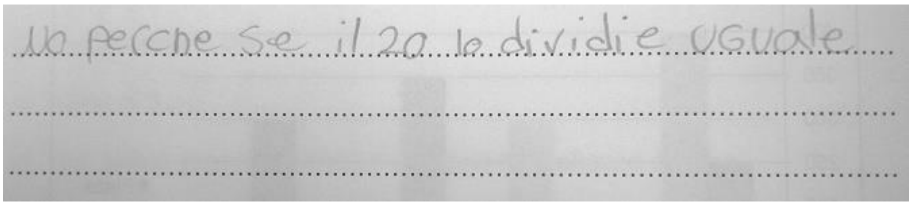


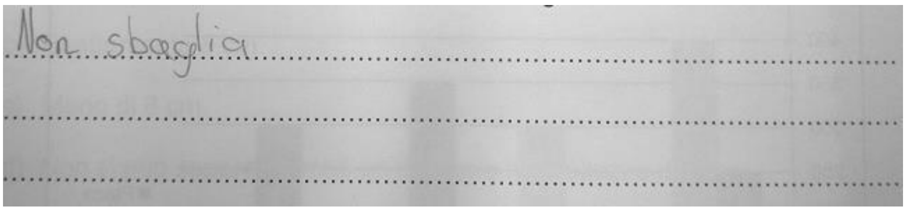


Il 7,7% degli allievi non riporta un esempio. È interessante il seguente protocollo, che evidenzia le convinzioni che spesso pervadono gli allievi: l’importante non è capire o porsi domande, ma eseguire l’operazione o risolvere il problema. Sulle convinzioni degli allievi relative alla matematica e alla risoluzione dei problemi si veda l’interessante libro di Zan (1998).

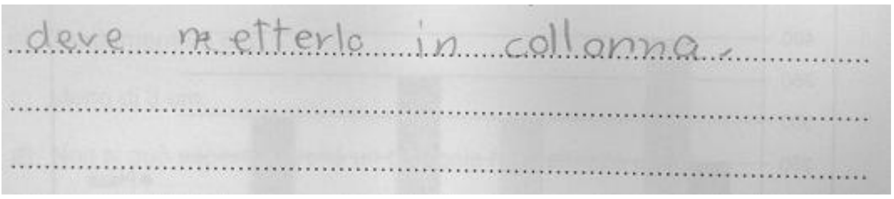


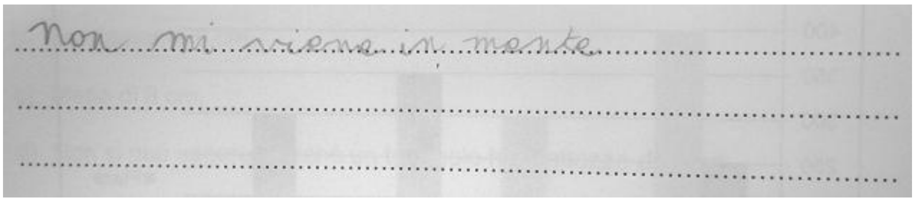
Il 2% afferma che Paolo non sbaglia, come evidenziano i seguenti protocolli.





Nella categoria “Altro” troviamo risposte come “Non mi viene in mente”, “Devo metterlo in colonna”. Di seguito riportiamo alcuni protocolli a mo’ di esempio.





Un dato particolarmente preoccupante è la percentuale di risposte mancanti, superiore al 50% (50,7%), dovuto sicuramente in parte al fatto che la domanda era la 57-esima tra le 60 somministrate nel primo fascicolo. Va osservato però che la 57-esima domanda del secondo fascicolo non ha registrato una percentuale così alta di risposte mancanti. Per questo motivo pensiamo che la principale causa sia nella difficoltà degli allievi a gestire argomentazioni legate a contenuti matematici. La difficoltà in tale processo è forse dovuta a una prassi didattica abituata a insegnare procedure piuttosto che a sviluppare giustificazioni e significati.

E16) Carla deve eseguire mentalmente il calcolo 123 × 3.
Calcola 1 × 3 = 3   2 × 3 = 6 e 3 × 3 = 9.
Poi scrive i risultati uno di seguito all’altro e ottiene il numero 369 che è il risultato del calcolo iniziale.
Il procedimento di Carla però non funziona sempre.
Giustifica l’affermazione scrivendo un calcolo per il quale il procedimento di Carla non funziona.
………

Risposta corretta:
Qualsiasi esempio di moltiplicazione in cui c’è un riporto, per cui il procedimento di Carla fallisce.

Risultati:

Risposta corretta	**Risposte errate**			**Mancante/ Non valida**
Riporta un esempio corretto	**Non riporta un esempio**	**Riporta un esempio errato**	**Altro**	
18,9	18,7	9,6	4,8	48,0

Programmi ’84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione: ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni; (…).

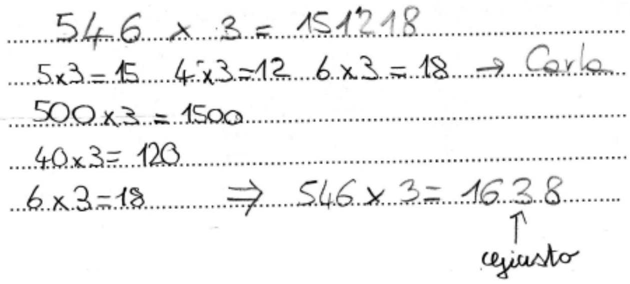
Nuovo Piano di studio della scuola dell’obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L’allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L’allievo è in grado di argomentare per sostenere una tesi in ambito aritmetico.

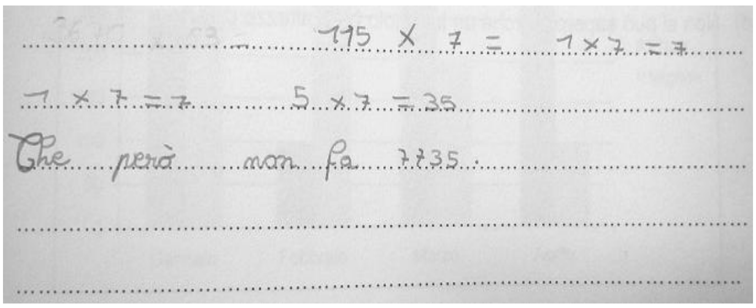
Il quesito riporta uno stimolo, per il quale si chiede di capire perché il procedimento esposto non può funzionare sempre. Come nel precedente quesito, l’allievo per rispondere correttamente può semplicemente mostrare un controesempio, ossia un calcolo per cui il procedimento di Carla non funziona.

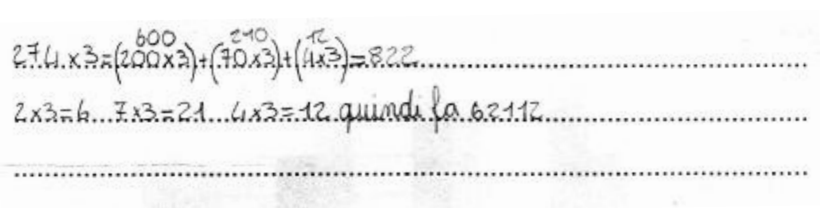
La ricerca in didattica della matematica ha evidenziato che gli aspetti del comunicare occupano un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento e sono supportati da diversi registri linguistici, scritti, orali, simbolici, gestuali, ... Le richieste argomentative sono un punto debole per gli allievi di tutti i livelli e il numero di omissioni, talvolta significativo, induce a riflettere sull'importanza di una pratica non sempre radicata nella didattica d'aula. Ecco perché, fin dai primi anni della scuola elementare, è fondamentale prevedere attività di discussione, di interazione, di recupero dell'errore e di argomentazione logica. Argomentare non è solamente rispondere a una domanda, ma mettere in campo una struttura comunicativa matematica fondata anche su connettivi, quantificatori, informazioni fondamentali, con anche intrecci tra pensiero logico e narrativo. La codifica delle argomentazioni da parte dell'insegnante è un'attività ricca di informazioni sui processi risolutivi degli alunni e sulle strutture irrinunciabili tipiche di una risposta argomentativa (che per sua natura può costituire un preludio alla dimostrazione). Per queste ragioni riteniamo preferibile la tipologia di domanda aperta articolata per valutare la capacità di argomentare o condurre un ragionamento logico.

Il quesito è risultato molto difficile per i bambini e molto spesso male interpretato. Solo il 18,9% degli allievi riporta un esempio corretto o una giustificazione esauriente.

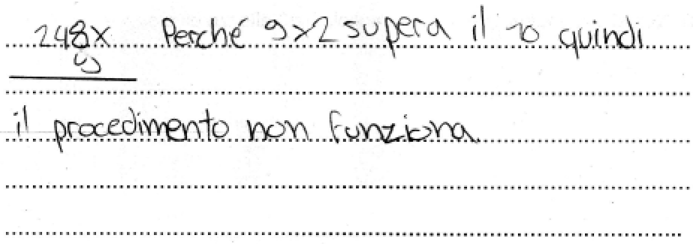
Di seguito riportiamo i protocolli di studenti che mostrano un controesempio ben formulato:


546 x 3 = 151218
5x3=15 4x3=12 6x3=18 → Carla
500x3=1500
40x3=120
6x3=18 ⇒ 546x3=1638
giusto

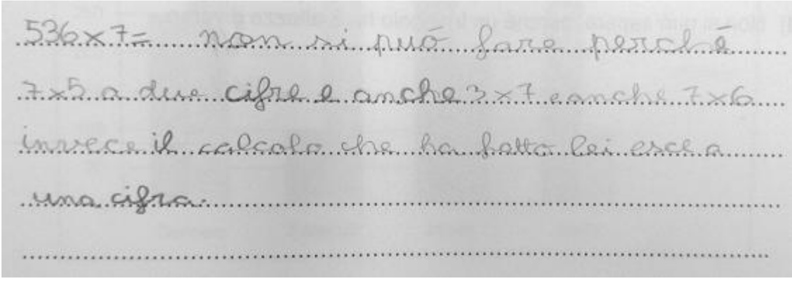

115 x 7 = 1x7=7
1x7=7 5x7=35
Che però non fa 7735.


274x3=(200x3)+(70x3)+(4x3)=822 (600, 210, 12)
2x3=6 7x3=21 4x3=12 quindi fa 62112

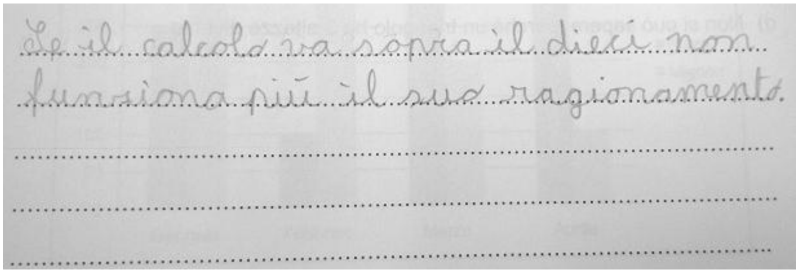
Nel seguente protocollo l'allievo giustifica l'errore nel procedimento con il fatto che uno dei prodotti supera il 10 (dunque c'è un "riporto" da gestire).

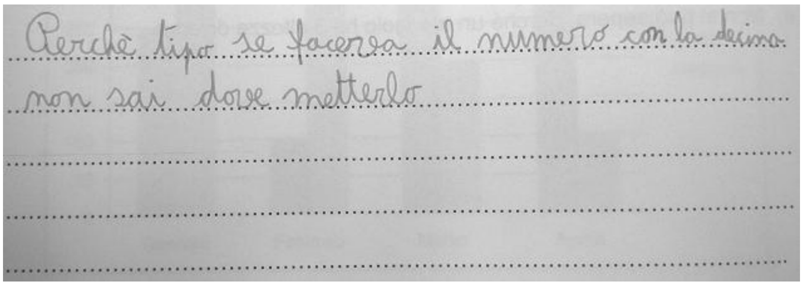

248x
4
Perché 9x2 supera il 10 quindi
il procedimento non funziona

In modo ancora più preciso ritroviamo un ragionamento analogo nel seguente protocollo:


536x7= non si può fare perché
7x5 a due cifre e anche 3x7 e anche 7x6
invece il calcolo che ha fatto lei esce a
una cifra.

Nei seguenti protocolli gli allievi non riportano esempi, ma tentano di fornire una giustificazione generale. I ragionamenti non sono erronei ma denotano la necessità di essere ancora "educati" alla comunicazione e all'argomentazione.


Se il calcolo va sopra il dieci non
funziona più il suo ragionamento.

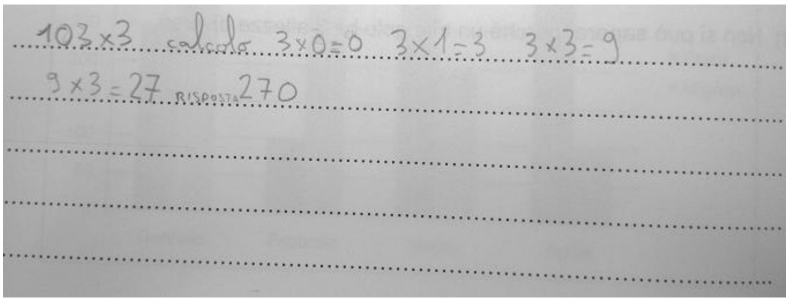

Perchè tipo se facevo il numero con la decina
non sai dove metterlo

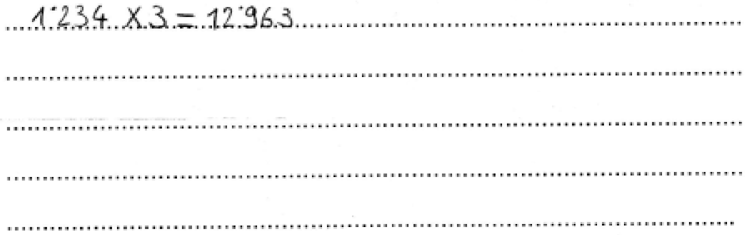
Insieme al quesito E15), la domanda registra le peggiori performance di questo ambito/aspetto di competenza.

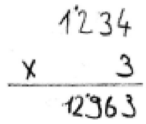
Tra tutti i quesiti a risposta aperta, quelli nei quali è chiesto di produrre per iscritto un'argomentazione presentano basse percentuale di risposte corrette e, elemento forse ancor più significativo, un alto livello di non risposte. Come era prevedibile "Argomentare e giustificare" è uno degli aspetti di competenza che presenta maggiori difficoltà per gli allievi, anche perché coinvolge competenze di tipo trasversale. Chi argomenta non deve solo possedere conoscenze solide e ben interiorizzate sull'oggetto in discussione, ma anche avere la capacità di saper gestire, dal punto di vista logico e linguistico, i vari passi del ragionamento e la loro concatenazione, comprendere e fare proprio il fine da perseguire e tanto altro ancora.

Soddisfare queste condizioni richiede da parte dell'insegnante un lavoro lungo e sistematico, che consenta all'allievo di creare un retroterra culturale adeguato.

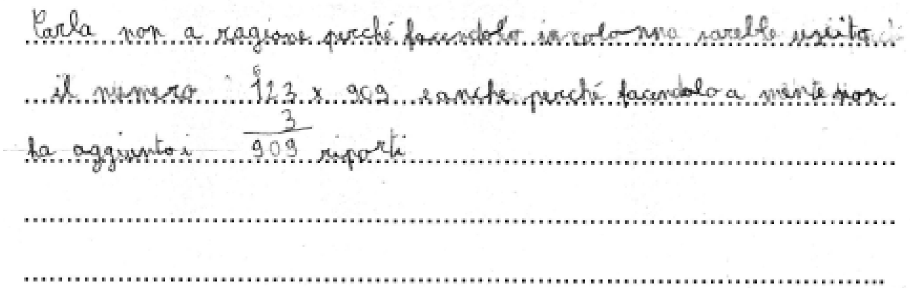
Il 9,6% degli alunni riporta un calcolo errato o un esempio sbagliato, come quelli mostrati nei seguenti protocolli:


103x3 calcolo 3x0=0 3x1=3 3x3=9
9x3=27 RISPOSTA 270

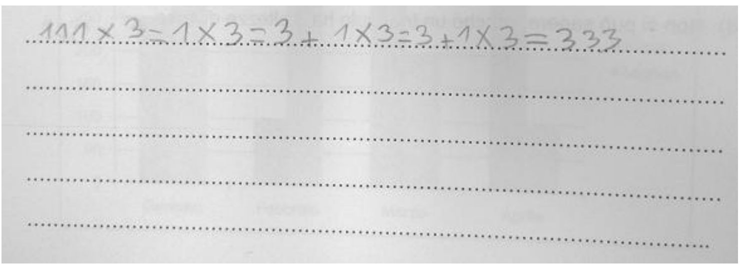

1'234 X 3 = 12'963


1'234 x 3 = 12'963

Il protocollo precedente evidenzia un'errata applicazione dell'algoritmo di moltiplicazione: l'allievo "capovolge" il prodotto, ossia inserisce i prodotti parziali partendo da sinistra invece che da destra. Nel seguente protocollo invece l'allievo aggiunge un riporto, quando in realtà non c'era.


Carla non a ragione perché facendolo in colonna sarebbe uscito il numero 123 x 909 anche perché facendolo a mente non ha aggiunto i 3 909 riporti

Nel caso seguente l'allievo riporta un esempio in cui il ragionamento di Carla funziona:


111 x 3 = 1 X 3 = 3 + 1 X 3 = 3 + 1 X 3 = 333

Il 18,7% degli allievi non riporta alcun esempio e, dall'argomentazione presentata, lascia intendere una profonda incomprensione della domanda.

Nel seguente protocollo l'allievo mostra un procedimento basato sulla proprietà distributiva per calcolare il prodotto 123 × 3, ma non fornisce una risposta alla domanda posta:

Carla deve eseguire mentalmente il calcolo 123 x 3.
Calcola 1 x 3 = 3 2 x 3 = 6 e 3 x 3 = 9.
Poi scrive i risultati uno di seguito all'altro e ottiene il numero 369 che è il risultato del calcolo iniziale.
Il procedimento di Carla però non funziona sempre.
Giustifica l'affermazione scrivendo un calcolo per il quale il procedimento di Carla non funziona.

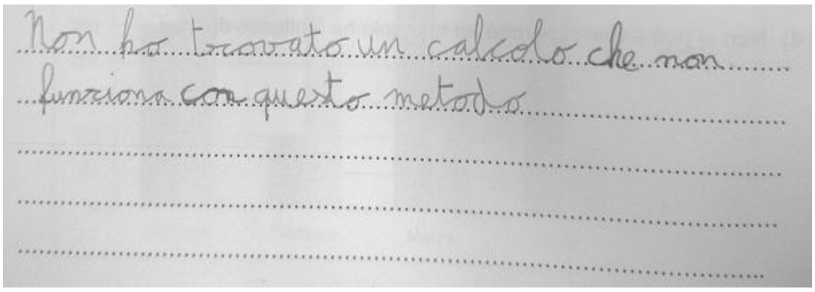
io farei
120 x 3 e poi
3x3 e poi
somma.

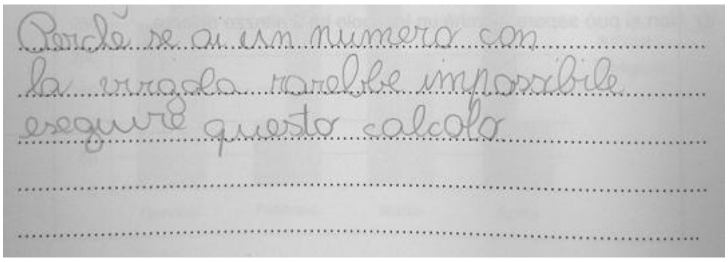
Nei seguenti due casi gli allievi giustificano l'errore di Carla con il fatto che non ha risolto in colonna la moltiplicazione, oppure ha considerato una cifra alla volta:

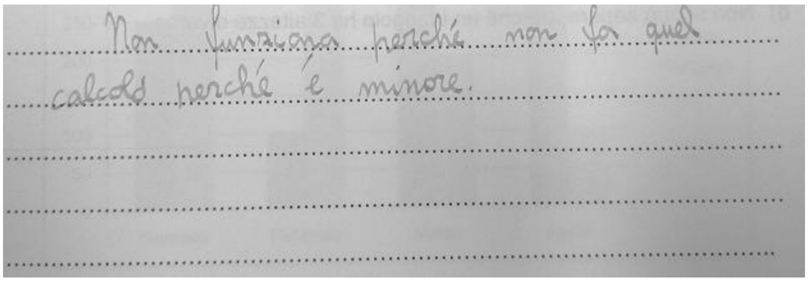
deve risolvere in colonna 123 × 3 = 369

perché calcoli sempre una cifra alla volta e non va bene.

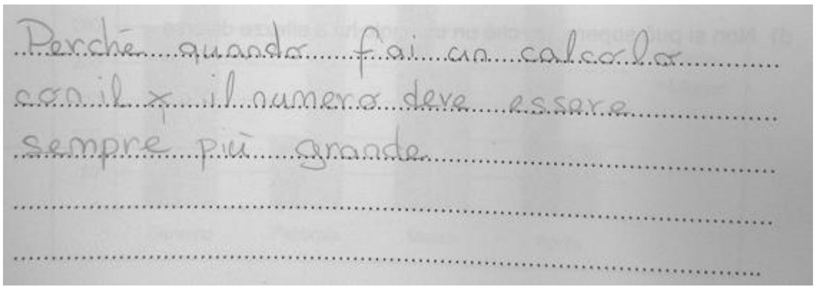
Nella categoria "Altro" (3,1%) sono comprese spiegazioni vaghe, non corrette, oppure "Non lo so". Riportiamo qualche protocollo come esempio.


Non ho trovato un calcolo che non funziona con questo metodo

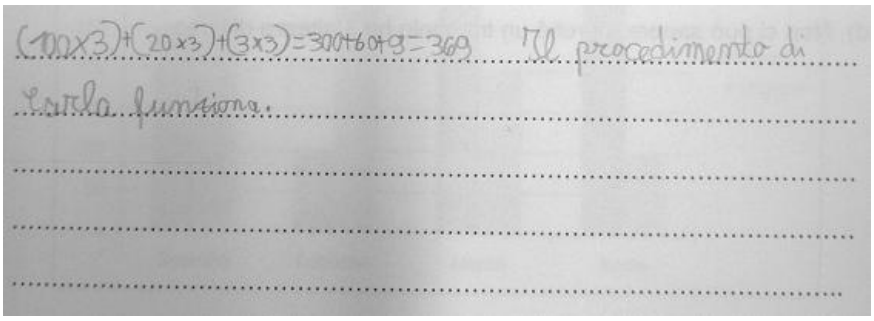

Perchè se ci era un numero con la virgola sarebbe impossibile eseguire questo calcolo


Non funziona perché non fa quel calcolo perché è minore.

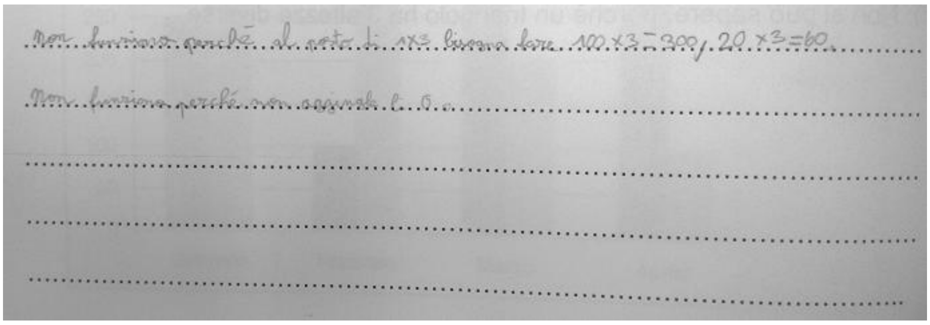
Nel seguente protocollo, oltre ad una mancata comprensione della consegna osserviamo la misconcezione dell'allievo legata al fatto che "la moltiplicazione accresce":

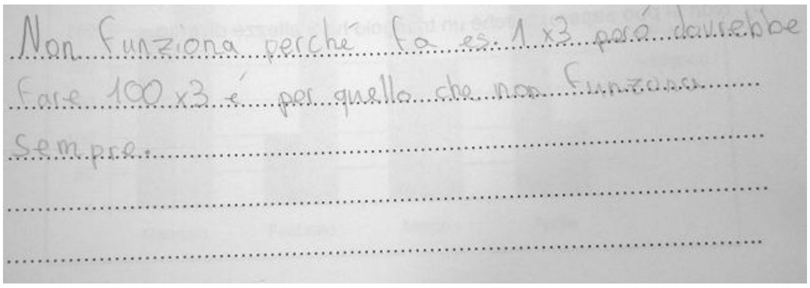

Perchè quando fai un calcolo con il x il numero deve essere sempre più grande

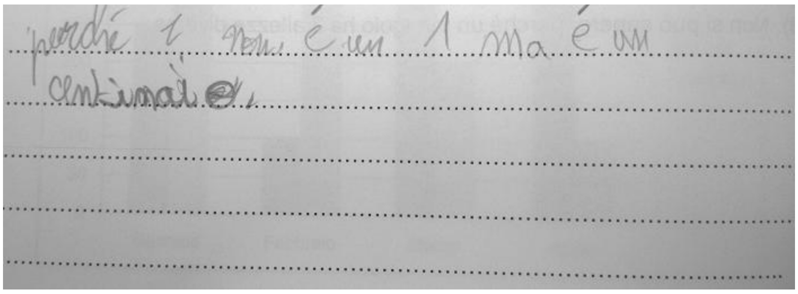
L'1,7% (sempre della categoria "Altro") invece risponde facendo riferimento ad una risoluzione scorretta in riga della moltiplicazione.

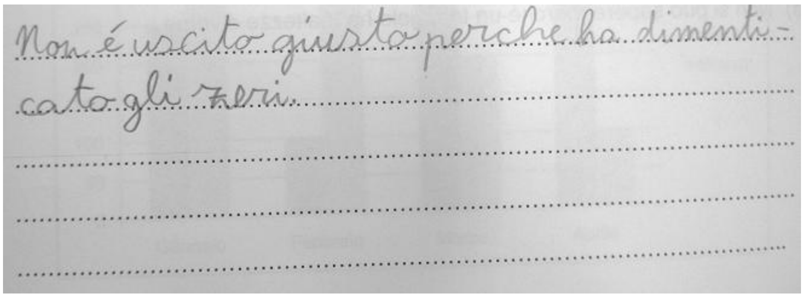

(100x3)+(20x3)+(3x3)=300+60+9=369 Il procedimento di Carla funziona.

Nei seguenti protocolli l'allievo individua l'errore nell'assenza degli zeri nelle centinaia e nelle decine.









Ben il 48% di allievi non risponde, mancanza giustificata sia dalla difficoltà del quesito, sia dal fatto che era l'ultimo dei 60 somministrati nel primo fascicolo.

6.5. Divisioni

E17) La maestra ha proposto questo calcolo ai suoi allievi:
1 : 2 =
Qual è il risultato del calcolo?

a) Non si può fare perché 1 è più piccolo di 2 e non si può dividere per un numero più grande.
b) Il risultato è 0 perché divido un numero per uno più grande.
c) Il risultato è 0,5 perché se moltiplico 0,5 per 2 trovo 1.
d) Il risultato è 2 perché 1 ci sta due volte nel 2.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
25,0	6,2	45,7	19,4	3,7

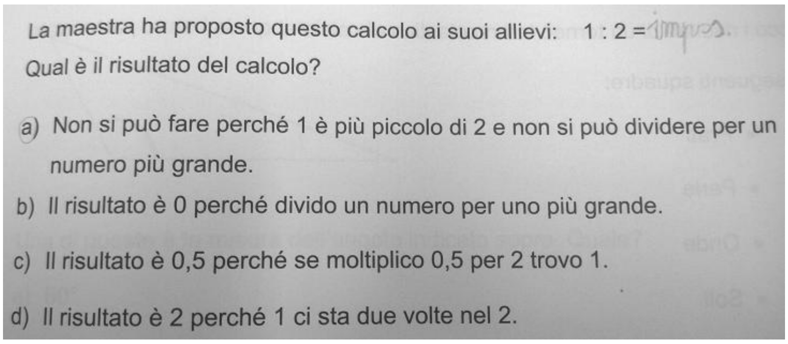
Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione:
• ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni;
• relazione tra moltiplicazione e divisione (…).

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito ha lo scopo di indagare le convinzioni degli allievi legate all'operazione di divisione. Come afferma Sbaragli (2009b): «il primo approccio con questa operazione è intuitivo e gestibile anche da bambini di scuola dell'infanzia soprattutto quando si fa riferimento a situazioni reali: dividere caramelle, penne, figurine, …, ma quando si passa agli aspetti algoritmico, concettuale e soprattutto strategico (specifico dei problemi) le cose si complicano notevolmente». Inoltre, quando si passa dall'insieme numerico dei naturali a quello dei decimali, l'allievo si porta dietro delle misconcezioni che creano particolari ostacoli alla comprensione. Qui entrano in gioco quelli che Fischbein chiama modelli intuitivi delle operazioni (Fischbein, 1985a,b; 1992; 1998). Quello che fa riferimento alla situazione illustrata nel quesito è il modello intuitivo, assai frequente, per cui in una divisione A : B, il numero B deve essere minore del numero A, in altre parole si deve sempre dividere un numero grande per uno piccolo. Lo studente ha diviso per anni un numero grande per uno più piccolo, si è fatto dunque l'immagine che il dividendo deve essere maggiore del divisore. Lo stesso modo in cui la divisione è proposta fin dalle prime volte a scuola spinge a credere in ciò: si tratta sempre di ripartire molti oggetti tra poche scatole ad esempio. Ricerche in didattica della matematica hanno confermato la presenza di questo ostacolo cognitivo anche in studenti delle scuole superiori (D'Amore, 1999). Di conseguenza, in risposta al problema: «15 amici si dividono 5 chilogrammi di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?» gli allievi sono spinti ad eseguire 15 : 5 invece di 5 : 15, dividendo così "gli amici ai biscotti invece dei biscotti agli amici".

Non stupisce dunque il fatto che in questo quesito solo il 45,7% degli allievi di quarta elementare abbia risposto in modo corretto e ben il 25% abbia optato per la prima scelta, l'unica che ammette l'impossibilità del calcolo legata al fatto che il primo termine è più piccolo del secondo. Come afferma Fischbein (1985b): «(…) i concetti matematici e le operazioni non si liberano mai completamente dalle interpretazioni intuitive primitive. Tali interpretazioni possono essere controllate, ma probabilmente mai eliminate del tutto». Per quanto concerne le convinzioni degli insegnanti sul concetto di divisione si veda Arrigo, Sbaragli (2008).

Nel seguente protocollo l'allievo tiene a specificarlo anche a fianco dell'operazione "1 : 2 = impos."


La maestra ha proposto questo calcolo ai suoi allievi: 1 : 2 =
Qual è il risultato del calcolo?

a) Non si può fare perché 1 è più piccolo di 2 e non si può dividere per un numero più grande.
b) Il risultato è 0 perché divido un numero per uno più grande.
c) Il risultato è 0,5 perché se moltiplico 0,5 per 2 trovo 1.
d) Il risultato è 2 perché 1 ci sta due volte nel 2.

Non pochi rispondono scegliendo l'opzione d) (19,4%), confondendo dividendo e divisore. Probabilmente l'allievo impossibilitato a rispondere alla domanda, la modifica inconsapevolmente in 2 : 1, il cui risultato è effettivamente 2, perché 1 ci sta due volte nel 2.

E18) Marco non sa ancora fare le divisioni con la virgola ma vuole provare a trovare il risultato di 1 : 0,2.
Marco pensa: "Trovare il risultato di questo calcolo è come cercare quante monete da 20 centesimi occorrono per fare 1 Fr. Siccome ci vogliono 5 monete, il risultato di 1 : 0,2 è 5".
Secondo te, il ragionamento di Marco è corretto?

a) Sì
b) No

Risposta corretta: a

Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
47,7	46,7	5,6

Programmi '84:
Operazioni
Moltiplicazione e divisione:
• ripresa e approfondimento dei concetti delle due operazioni;
• relazione tra moltiplicazione e divisione.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Interpretare, riflettere sui risultati
L'allievo è in grado di accettare o rifiutare un procedimento o un risultato ricorrendo alla stima o al calcolo e tenendo in considerazione le condizioni del problema o la realtà.

Il quesito ha come tema la divisione tra numeri razionali e propone un'immagine concreta per spiegare come è possibile ragionare per trovare il risultato di una divisione anche se non si conosce l'algoritmo risolutivo. Tale quesito rientra maggiormente nell'aspetto di competenza "Interpretare e riflettere sui risultati" piuttosto che "Argomentare e giustificare". I risultati del campione evidenziano che le percentuali di risposte sbagliate e corrette sono confrontabili. Il quesito a scelta multipla prevede solo due possibili risposte, "Sì" o "No" e dunque le percentuali 47,7% di risposte esatte e 46,7% di risposte errate non forniscono molte informazioni sulle competenze degli allievi, o meglio non è evidente se coloro che hanno risposto in modo corretto l'hanno fatto perché consapevoli e competenti nell'argomento, oppure hanno scelto casualmente. La domanda è sicuramente complessa e il ragionamento illustrato piuttosto articolato. Oltre alla conoscenza del concetto di divisione, si richiede all'allievo la capacità di passare da un registro semiotico ad uno differente. Il divisore 0,2 viene trasformato implicitamente in 20 centesimi; inoltre la risoluzione della divisione 1 : 0,2 viene trasformata in un problema equivalente, ossia trovare quante monete da 20 centesimi servono per ottenere 1 Fr. Questo passaggio risulta senza dubbio difficoltoso per gli allievi. D'altro canto è assolutamente formativo abituarli a passare da un registro ad un altro e da un contesto ad un altro, alla ricerca di un processo risolutivo intuitivo e immediato.

Il testo fa esplicito riferimento all'uso e all'interpretazione del linguaggio matematico e al suo rapporto con quello naturale. Si pensi al divisore 0,2 che diventa 20 centesimi, d'uso più comune nel linguaggio quotidiano.

Tale obiettivo è probabilmente tra i più importanti dal punto di vista formativo, in quanto fortemente legato all'idea di un processo di insegnamento/apprendimento finalizzato a dare gli strumenti all'allievo per trasferire ciò che apprende in contesti diversi da quello scolastico. Per approfondimenti riguardo al complesso rapporto tra "linguaggio matematico" e "linguaggio quotidiano" si veda Ferrari (2004), dove l'autore riporta anche ulteriori interessanti esempi sui quali gli insegnanti di scuola elementare si scontrano spesso, come "spigolo" o "altezza", per i quali la definizione matematica si discosta dal senso comune dato a questi termini.

A partire dal ragionamento di Marco potrebbe essere interessante indagare sulle possibili interpretazioni dei bambini di situazioni analoghe risolvibili con la stessa operazione. Da questo scaturisce l'importanza di cercare di far emergere i processi risolutivi in modo da mettere in risalto eventuali interpretazioni scorrette, che probabilmente dalla sola esecuzione di un algoritmo non emergerebbero.

Questo tipo di divisione può dare lo spunto all'insegnante per fare un'ulteriore osservazione con gli allievi. Un altro modello intuitivo che spesso ritroviamo nei ragionamenti degli allievi è che la divisione "diminuisce sempre". Nell'arco della scuola elementare viene accettato il modello intuitivo di divisione tra naturali che porta a credere che la divisione "diminuisce sempre", ossia che il risultato sia minore (o al limite uguale) del dividendo. Questa convinzione viene erroneamente estesa ai razionali, portando a credere ad esempio che 4 : 0,5 faccia 2, invece di 8. In effetti, che la divisione "faccia aumentare", "spiazza" le attese dell'allievo. Tra coloro che hanno risposto "No" alla domanda probabilmente troveremmo qualcuno che ha immaginato che il risultato di una divisione non poteva dare un numero maggiore del dividendo, 1 : 0,2 non può restituire 5. Questa misconcezione influenza spesso negativamente la scelta dell'operazione da eseguire per risolvere un problema (Sbaragli, 2009b). Per questo può essere didatticamente vincente nascondere tutti o una parte dei numeri quando viene proposto un problema o una operazione, concentrandosi solamente sull'operazione risolutiva e non sull'algoritmo. Come mostra il ragionamento di Marco procedere per analogia può essere d'aiuto agli studenti a concettualizzare meglio un certo oggetto matematico.

6.6. Uguaglianza

E19) La maestra scrive alla lavagna: 18 + 47 = 60 + 5
Perché è corretto?

a) Perché ci sono due numeri a destra e due a sinistra del segno di uguale.
b) Perché il risultato della prima addizione è uguale al risultato della seconda addizione.
c) Perché 18+47 è maggiore di 60.

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	Mancante/ Non valida
9,5	49,3	34,0	7,2

Programmi '84:
Operazioni
Addizione e sottrazione: esercitazione delle conoscenze precedentemente acquisite.

Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.

Il quesito non vuole valutare l'abilità dell'allievo nello svolgere le addizioni, bensì la conoscenza della relazione di uguaglianza espressa dal simbolo "=". Il quesito è simile nell'intento al D20) dell'ambito "Numeri e calcolo", aspetto di competenza: "Eseguire e applicare", pur essendo questo a risposta chiusa e l'altro a risposta aperta univoca. I risultati sono tra l'altro confrontabili.

Un aspetto che rende più complesso il quesito è il fatto che le tre risposte possibili sono tutte basate su "fatti veri": è vero che ci sono due numeri a destra e due numeri a sinistra dell'uguale, che la somma 18 + 47 è uguale alla somma 60 + 5, e che il risultato di 18 + 47 è maggiore di 60.

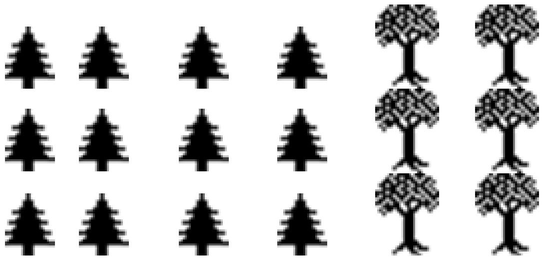
Meno della metà degli allievi (49,3%) ha risposto in modo esatto giustificando la correttezza della scrittura con l'uguaglianza dei risultati dell'addizione a destra e a sinistra dell'uguale.

Interessante è che il 34% degli allievi sceglie la terza giustificazione, dove si focalizza l'attenzione sul primo numero dopo il segno di =, ossia il 60, trascurando il resto. È possibile che qualcuno di questi allievi abbia risolto la prima addizione e trovando come risultato 65, si sia soffermato solo su questo valore, scegliendo dunque tra le giustificazioni quella che riportava una caratteristica di questo numero, l'essere maggiore di 60. Il simbolo dell'uguale è uno dei primi segni incontrati dall'allievo nel suo percorso scolastico e a questo a volte viene associato il particolare significato di "comando" di esecuzione di operazioni, una sorta di tasto "Enter", "Run", "Execute" ecc. della tastiera. Come afferma Zan (2007a): «questo errore nell'uso del segno '=' è molto diffuso, e non solo fra i bambini. Molti insegnanti ritengono che comunque non si tratti di un errore grave, perché ha a che fare solo con la forma, e non riguarda il ragionamento. In realtà questa interpretazione del segno uguale crea non poche difficoltà in contesto algebrico, dove è richiesta invece la comprensione della valenza relazionale del simbolo». [Come già osservato per l'item D20)].

Il 7,2% degli allievi non risponde o fornisce una risposta non valida.

6.7. Passaggio di registri semiotici

E20) Vedi qui rappresentato un vivaio di pini e ciliegi:



Giorgio, per trovare il numero totale di piante, ha eseguito il seguente calcolo:
(4 × 3) + (2 × 3)
Secondo te, che ragionamento ha fatto Giorgio?
………………………………………………………...……………………………………………………………

Possibile risposta corretta:
Giorgio ha considerato 3 file di 4 pini ciascuno (4×3) o 4 file di 3 pini (3×4) e 3 file di 2 ciliegi ciascuno (2×3) o 2 file di 3 ciliegi (3×2) e poi ha sommato i due risultati (12+6).

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate			Mancante/ Non valida
Fornisce una risposta corretta ed esauriente	**Non fornisce alcuna spiegazione**	**Fornisce una spiegazione troppo generica**	**Altro**	
34,0	26,7	15,7	9,1	14,5

Programmi '84:
Problemi
Problemi che implichino i concetti di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; (…).

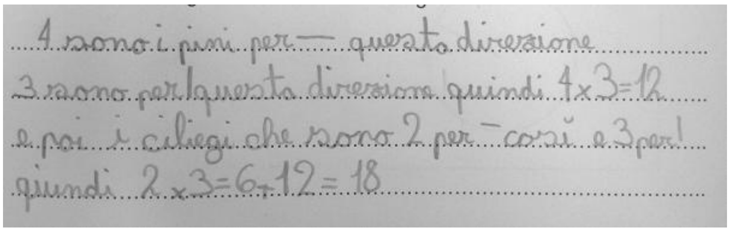
Nuovo Piano di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di motivare un procedimento risolutivo concernente situazioni aritmetiche, per mezzo di calcoli e spiegazioni verbali.
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Argomentare, giustificare
L'allievo è in grado di argomentare per sostenere una tesi in ambito aritmetico.

Il quesito richiede il passaggio da un registro grafico ad uno aritmetico. L'immagine nel testo rappresenta uno schieramento di 18 alberi, 3 file da 4 pini o 4 file da 3 pini e 3 file da 2 ciliegi, o 2 file da 3 ciliegi. Si chiede di giustificare le rappresentazioni aritmetiche (4 × 3) + (2 × 3), oppure tutte le altre forme equivalenti a seconda di come vengono considerate le moltiplicazioni. Non si chiede dunque un'esplicitazione del calcolo. Il quesito è uno dei pochi strutturati in modo aperto articolato, l'allievo dunque può scegliere liberamente la strategia argomentativa più consona. Anche in questo caso, i risultati sono piuttosto deludenti, a conferma del fatto che probabilmente gli aspetti strettamente legati all'apprendimento comunicativo siano spesso trascurati nella pratica didattica.

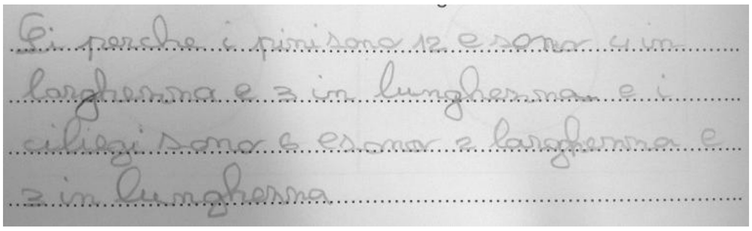
La presenza di soli 3 quesiti a risposta aperta articolata tra i 20 quesiti di questo ambito, e più in generale tra tutti i 120 quesiti, è presumibilmente giustificata dalla difficoltà di codificare le risposte dei bambini nel modo corretto. Non sempre è evidente il ragionamento messo in atto dall'allievo, inoltre alcuni di loro hanno ancora necessità di dedicare buona parte della loro attenzione agli aspetti strumentali della scrittura e ciò potrebbe condizionare le loro capacità di argomentare attraverso la stesura di un testo. D'altra parte a scopi didattici, sarebbe assai utile conoscere maggiormente questa capacità degli allievi. Converrebbe, perciò, in futuro lasciare più risposte aperte articolate da far codificare a chi possiede competenze specifiche di didattica della matematica. Proprio perché un'argomentazione si differenzia da una semplice risposta è importante che siano esplicitate le caratteristiche fondamentali che rendono corretta l'affermazione.

Le risposte corrette registrate sono il 34%. Di seguito riportiamo qualche protocollo interessante.

Qui l'allievo esplicita un ragionamento utilizzando dei simboli per indicare le direzioni orizzontale e verticale:


4 sono i pini per — questa direzione
3 sono per questa direzione quindi 4x3=12
e poi i ciliegi che sono 2 per — così e 3 per |
quindi 2x3=6+12=18

A differenza del seguente protocollo, dove l'allievo raffigura mentalmente la posizione degli alberi a formare dei rettangoli e utilizza un linguaggio specifico "lunghezza" e "larghezza" che spesso viene utilizzato nella realtà.


Si perche i pini sono 12 e sono 4 in
larghezza e 3 in lunghezza e i
ciliegi sono 6 e sono 2 larghezza e
3 in lunghezza

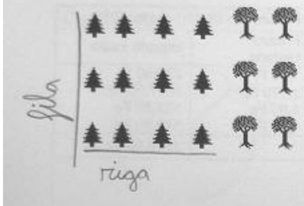
Il quesito d'altronde si presta molto bene ad un passaggio da un registro aritmetico ad uno geometrico/grafico. Gli stessi schieramenti che i bambini sono abituati a vedere nell'ambito della moltiplicazione ricordano la rappresentazione grafica del quesito. È sicuramente importante che l'allievo possa sviluppare una visione geometrica di un problema aritmetico, così come spesso è utile vedere un problema geometrico da un punto di vista algebrico.

Questa riflessione può offrire spunti per lavorare sul passaggio da un registro all'altro, attività matematica che permea tutti gli ambiti di conoscenza della disciplina.

Come sottolinea D'Amore (2001), riprendendo la terminologia usata da Duval: «La costruzione dei concetti matematici è dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare più registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti: di rappresentarli in un dato registro, di trattare tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro¸ di convertire tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro».

È importante che anche in classe l'insegnante presti attenzione a queste tre distinte attività (rappresentare, trattare rappresentazioni, convertire rappresentazioni), tenendo in considerazione che passare da un registro di rappresentazione all'altro, attività che fa continuamente senza a volte averne consapevolezza e magari con l'intento di chiarire un concetto, può in certi casi costituire per l'allievo un ostacolo alla comprensione piuttosto che una facilitazione.

Nei seguenti protocolli l'allievo si serve anche di segni tracciati sulla figura per meglio esprimere il ragionamento attuato:



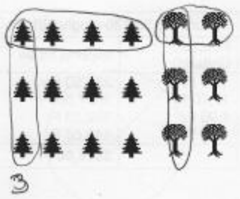
Giorgio, per trovare il numero totale di piante, ha eseguito il seguente calcolo:

(4 x 3) + (2 x 3)

Secondo te, che ragionamento ha fatto Giorgio?

In una fila ci sono 4 pini e ci sono 3 righe (4 x 3)
Ci sono 3 file di cigliegi e in una riga ce ne
sono 2 (2 x 3)

Vedi qui rappresentato un vivaio di pini e ciliegi:



Giorgio, per trovare il numero totale di piante, ha eseguito il seguente calcolo:

(4 x 3) + (2 x 3)

Secondo te, che ragionamento ha fatto Giorgio?

A contato i pini in lunghezza che sono 3
e poi in larghezza 4 e l'ha moltiplicato 4x3=12.
Dopo a contato gli alberi in lunghezza che sono 3,
poi in larghezza che sono 2, e l'ha moltiplicato
3x2=6

Vedi qui rappresentato un vivaio di pini e ciliegi:

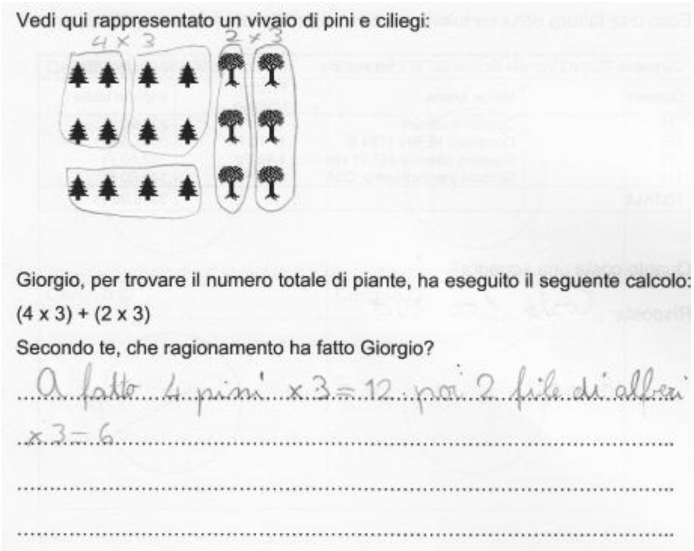
Giorgio, per trovare il numero totale di piante, ha eseguito il seguente calcolo:

(4 x 3) + (2 x 3)

Secondo te, che ragionamento ha fatto Giorgio?

Giorgio ha contato i pini in verticale
e quelli in orizzontale la stessa cosa
con i ciliegi

Nel seguente protocollo l'allievo elabora un altro tipo di raggruppamento, meno tradizionale, ma non per questo scorretto. L'operazione 4 × 3 infatti comporta il conteggio di 3 gruppi da 4 alberi ciascuno (oppure 4 gruppi da 3 alberi ciascuno), dove i raggruppamenti possono essere fatti in modi diversi.


Vedi qui rappresentato un vivaio di pini e ciliegi:

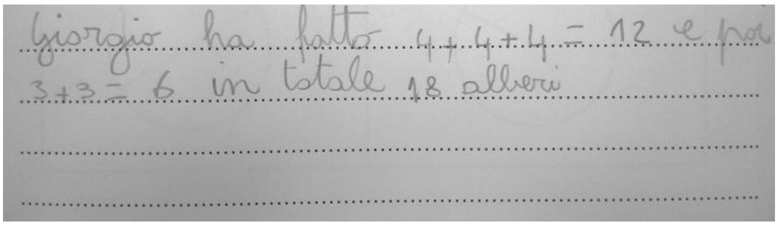
Giorgio, per trovare il numero totale di piante, ha eseguito il seguente calcolo:

(4 x 3) + (2 x 3)

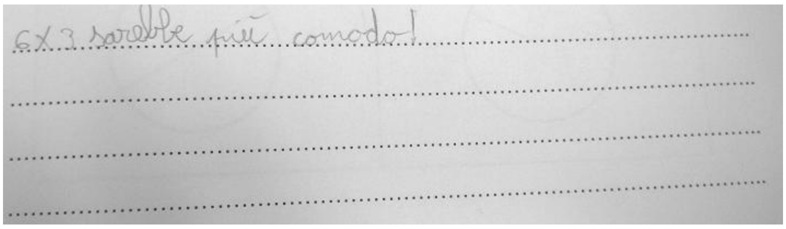
Secondo te, che ragionamento ha fatto Giorgio?

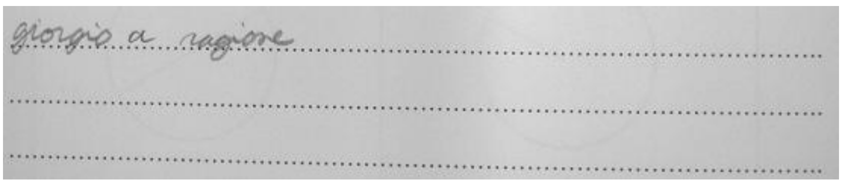
A fatto 4 pini x 3 = 12 poi 2 file di alberi x 3 = 6

Nel seguente protocollo l'allievo non ha fatto riferimento esplicito allo schieramento di alberi mostrato in figura come nei casi precedenti, ma ha indicato la somma 4 + 4 + 4 (considerando dunque la moltiplicazione definita come addizione ripetuta), specificando un particolare raggruppamento dei 12 pini e analogamente dei 6 ciliegi.

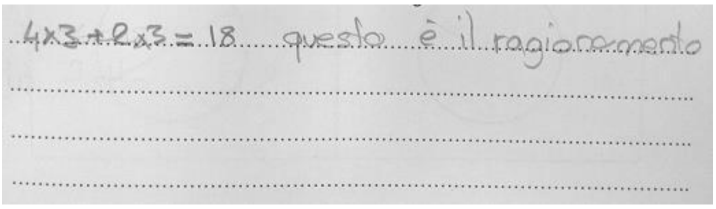

Giorgio ha fatto 4+4+4 = 12 e poi 3+3 = 6 in totale 18 alberi

Tra le risposte errate registriamo un 26,7% di allievi che non fornisce alcuna spiegazione, come nei casi qui riportati:


6 X 3 sarebbe più comodo!

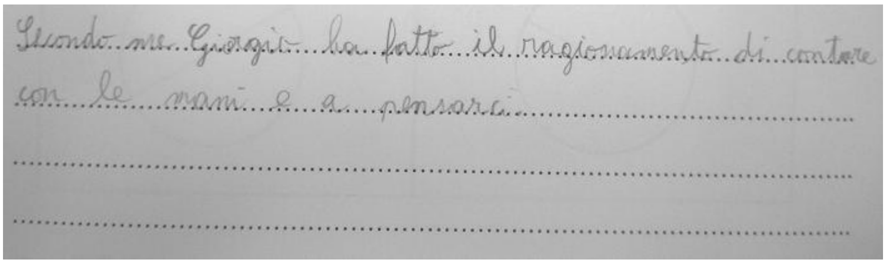

giorgio a ragione

Dall'analisi dei protocolli notiamo che diversi allievi hanno risposto inserendo il risultato dell'operazione, come se la richiesta della domanda fosse legata alla risoluzione di un calcolo.

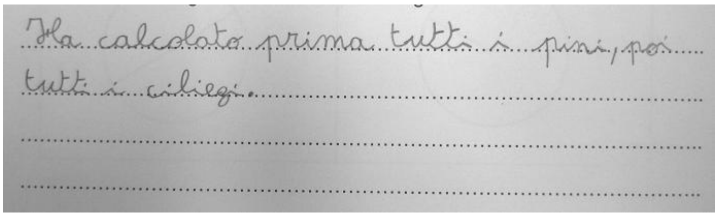

4x3+2x3=18 questo è il ragionamento

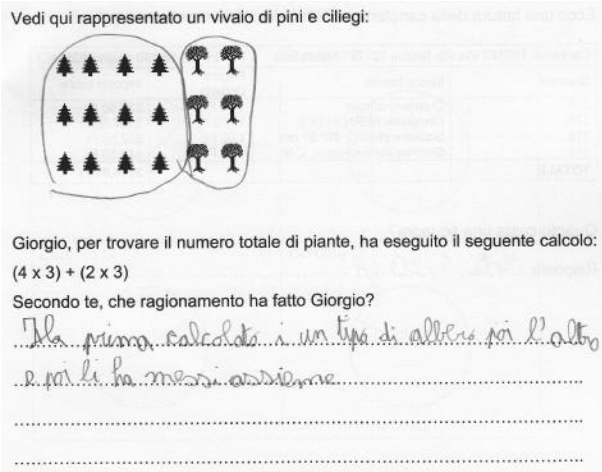
Siamo nuovamente di fronte ad un particolare atteggiamento relativo alla concezione della matematica, che comporta la convinzione che in essa si devono necessariamente fare calcoli. Spesso alla materia "matematica" sono associate prevalentemente immagini di calcoli, di figure geometriche tracciate secondo regole ben precise, di formule, di simboli speciali e non di ragionamenti e argomentazioni. Come affermano D'Amore e Sandri (1998): «solo la presenza di qualche calcolo sembra ridare la dignità necessaria al loro compito». Questa clausola del contratto didattico viene detta *esigenza della giustificazione formale*: «L'esigenza è tale non per un bisogno intrinseco dell'allievo, ma per una sua interpretazione del modello generale di problema e di comportamenti al riguardo, che si suppongono attesi da parte degli insegnanti». Dunque di fronte alla richiesta di spiegazioni o giustificazioni verbali, l'allievo si sente a disagio e tende a riprodurre o proporre calcoli numerici. Se un esercizio viene risolto senza i calcoli tradizionali… manca qualcosa. Tutto ciò può essere causa di notevoli difficoltà e ostacoli per un corretto e proficuo apprendimento.

Nel seguente protocollo osserviamo che l'allievo non ha in mente nessuna strategia di conteggio che non sia quella con le mani o a mente. L'operazione mostrata nel testo non sembra aver alcun legame con la rappresentazione grafica degli alberi.


Secondo me Giorgio ha fatto il ragionamento di contare con le mani e a pensarci.

Il 15,7% invece fornisce una spiegazione troppo generica, quindi non accettabile perché non evidenzia il ragionamento condotto dall'allievo. Di seguito riportiamo alcuni protocolli:

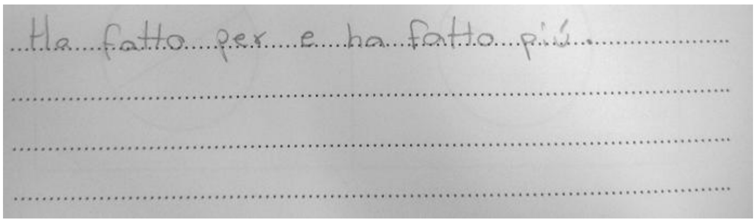

Ha calcolato prima tutti i pini, poi tutti i ciliegi.


Vedi qui rappresentato un vivaio di pini e ciliegi:

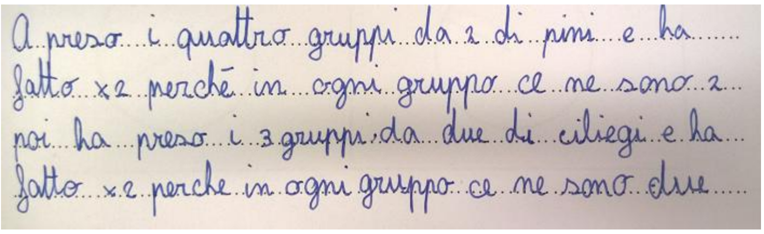
Giorgio, per trovare il numero totale di piante, ha eseguito il seguente calcolo:
(4 x 3) + (2 x 3)
Secondo te, che ragionamento ha fatto Giorgio?
Ha prima calcolato i un tipo di alberi poi l'altro
e poi li ha messi assieme

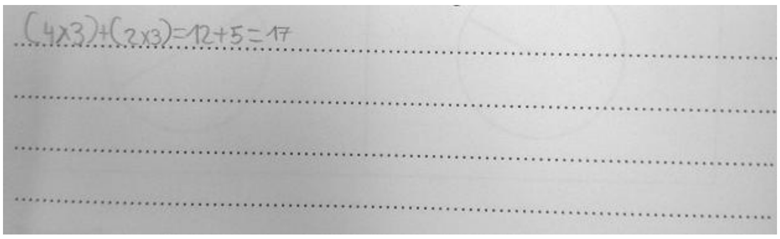
I precedenti due protocolli si soffermano sul significato dell'operazione di addizione ma non specificano il perché Giorgio utilizza anche la moltiplicazione. Risposte di questo tipo non possono essere accettabili, perché non forniscono una spiegazione dell'espressione riportata. Se Giorgio avesse scritto 12 + 6, allora sarebbero state considerate risposte corrette, ma in questo caso l'intento della domanda è strettamente legato al tipo di calcolo riportato.

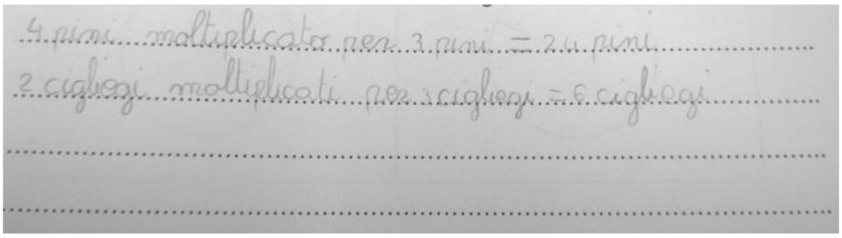
La seguente risposta invece è estremamente ermetica.


Ha fatto per e ha fatto più

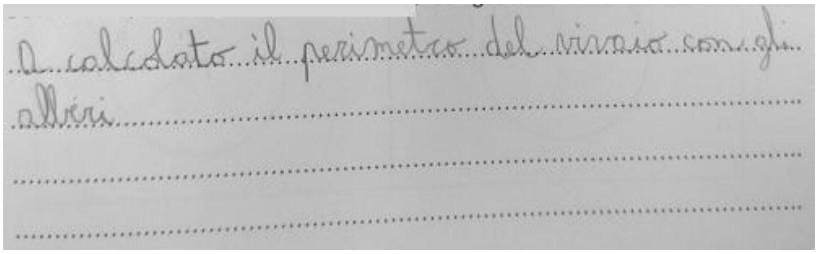
Nella categoria "Altro" (9,1%) troviamo risposte che contengono errori o inesattezze:


A preso i quattro gruppi da 2 di pini e ha
fatto x2 perché in ogni gruppo ce ne sono 2
poi ha preso i 3 gruppi da due di ciliegi e ha
fatto x2 perche in ogni gruppo ce ne sono due

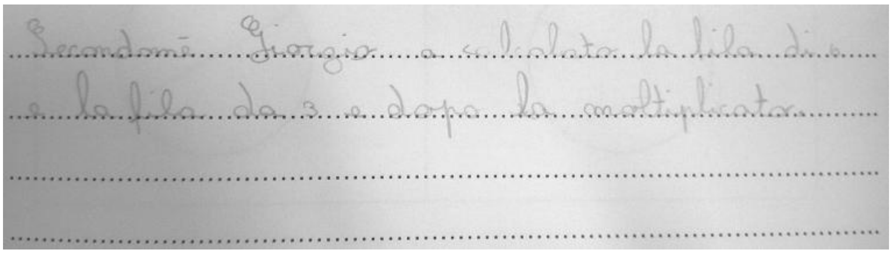

(4x3)+(2x3)=12+5=17


4 pini moltiplicato per 3 pini = 24 pini
2 cigliegi moltiplicati per 3 cigliegi = 6 cigliegi

Oppure risposte che evidenziano un ragionamento distante dalla richiesta:


a calcolato il perimetro del vivaio con gli alberi

Nel seguente protocollo l'allievo non tiene conto delle due moltiplicazioni (4 × 3 e 2 × 3) e quindi delle due tipologie di alberi, ma solo delle 3 file di 6 alberi ciascuna:


Secondo me Giorgio a calcolato la fila di 6 e la fila da 3 e dopo la moltiplicato

7. Analisi dei dati e relazioni – Sapere, riconoscere e descrivere

La suddivisione tematica dei quesiti nell'ambito "Analisi dei dati e relazioni", aspetto di competenza: "Sapere, riconoscere e descrivere", è stata individuata come segue: interpretazione di tabelle (9 quesiti), interpretazione di diagrammi a barre[8] (6 quesiti), interpretazione di istogrammi[9] (3 quesiti), interpretazione di grafici (2 quesiti). I 20 quesiti sono così suddivisi: 5 a risposta chiusa e 15 a risposta aperta univoca. Tra i quesiti a risposta chiusa 2 sono formulati fornendo 2 alternative di risposta e 3 quesiti fornendo 4 possibili scelte di risposta.

Nelle tabelle 1-2 sono riportate le risposte ai 20 quesiti, con l'indicazione delle percentuali ottenute, suddivise per tipologia: risposta chiusa, aperta univoca o aperta articolata. Sono state evidenziate le risposte corrette. Il testo di ciascun quesito con le relative percentuali di riuscita, l'individuazione della tematica relativa ai quesiti nei Programmi del 1984 e nel nuovo Piano di studio attualmente in consultazione e il relativo commento didattico sono presentate di seguito. Le percentuali riportate nelle seguenti tabelle sono state calcolate in base ai risultati dell'intera popolazione di allievi (2935), alla quale sono stati somministrati i fascicoli. Per l'analisi dei protocolli e delle risposte date ai soli quesiti a risposta aperta univoca o articolata è stato selezionato un campione significativo di 414 studenti. Le percentuali riportate nelle tabelle a fianco di ciascuno dei quesiti sono state calcolate sul suddetto campione.

• Quesiti a risposta chiusa

Domanda	**Risposte (%)**				**Mancante/ Non valida (%)**
	a	**b**	**c**	**d**	
F1	11,8	84,4			3,8
F2	1,5	1,0	92,2	1,7	3,6
F12	3,8	95,0			1,2
F15	21,4	3,5	39,6	8,5	27,0
F20	8,5	77,8	5,5	4,7	3,5

[8] Per diagramma a barre si intende un diagramma che rappresenta categorie separate e senza rapporti di continuità ed è utilizzato per rappresentare la frequenza con cui si presentano le modalità di un carattere qualitativo; per base si hanno le categorie della variabile, e come altezza la frequenza (http://www3.istat.it/servizi/studenti/valoredati/Cap4/Cap4_4_3.htm).

[9] L'istogramma è la rappresentazione grafica di una distribuzione in classi di un carattere continuo. È costituito da rettangoli adiacenti le cui basi sono allineate su un asse orientato e dotato di unità di misura. L'adiacenza dei rettangoli dà conto della continuità del carattere. Ogni rettangolo ha base di lunghezza pari all'ampiezza della corrispondente classe; l'altezza invece è calcolata come densità di frequenza, ovvero essa è pari al rapporto fra la frequenza (assoluta) associata alla classe e l'ampiezza della classe (http://it.wikipedia.org/wiki/Istogramma).

• Quesiti a risposta aperta univoca

Domanda	Risposta corretta (%)	Risposta errata (%)	Mancante/ Non valida (%)
F3	88,9	9,0	2,1
F4	74,1	18,9	7,0
F5	78,7	16,3	5,0
F6	87,1	6,6	6,3
F7	69,9	16,4	13,7
F8	66,1	29,2	4,7
F9	63,2	22,9	13,9
F10	79,9	17,2	2,9
F11	90,6	7,7	1,7
F13	88,3	10,0	1,7
F14	44,5	38,3	17,2
F16	69,3	20,3	10,4
F17	64,5	21,3	14,2
F18	69,1	15,0	15,9
F19	90,3	8,4	1,3

Tabella 1-2: Risposte alle diverse tipologie di quesiti

7.1. Interpretazione di tabelle

F1) La tabella rappresenta l'evoluzione del numero degli abitanti della Valle Onsernone.

anno	abitanti
1850	2723
1860	3262
1870	3470
1880	3383
1890	3219
1900	2821
1910	2450
1920	2220
1930	2023
1940	1738
1950	1685
1960	1183
1970	994
1980	895
1990	887

Nel 1910 gli abitanti erano più di 2500?

a) Sì
b) No

Risposta corretta: b

Risultati:

a	**b**	**Mancante/ Non valida**
11,8	84,4	3,8

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

F2) Al rientro delle vacanze natalizie, in classe è stato fatto un sondaggio sulle attività sportive svolte. Ecco la tabella dei risultati.

	Andrea	Beatrice	Caterina	Dafne	Enrico	Fabio	Giorgia	Ivo	Luca	Maria	Nicola	Orazio	Pietro	Renato	Silvia	Teo	Ugo	Zara
Sciare	x					x		x				x			x			x
Pattinare		x			x	x			x					x				x
Nuotare	x						x			x			x					x
Passeggiare		x	x								x						x	
Altro				x			x	x							x	x		

Una delle seguenti frasi è vera. Quale?

a) Beatrice e Ivo sono andati a nuotare.
b) Otto bambini sono andati a sciare.
c) Fabio e Zara sono andati sia a pattinare sia a sciare.
d) Luca e Silvia sono andati entrambi a pattinare.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
1,5	1,0	92,2	1,7	3,6

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

I quesiti di questa tematica rientrano nella lettura e interpretazione delle tabelle, da cui gli allievi dovevano trarre dati su cui eventualmente operare per comprendere una situazione. Il sapere leggere, interpretare e analizzare con occhi oggettivi e critici informazioni in registri semiotici diversi è un aspetto fondamentale per poter accedere pienamente ad un mondo come il nostro, caratterizzato da un'altissima densità di informazioni, comunicazione e tecnologia. Come sottolineato anche nel concetto di "literacy matematica", definito nel Programma OCSE for International Student Assessment - PISA (OECD/OCSE 2012, http://www.oecd.org/pisa/), lo sviluppo di tale competenza risulta ancor più cruciale all'interno del mandato specifico della scuola dell'obbligo; luogo deputato a preparare adeguatamente le giovani generazioni ad assumere un ruolo attivo e responsabile di futuri cittadini.

I risultati globali ottenuti dimostrano una buona competenza degli allievi in questo ambito. Per i primi due quesiti si hanno i seguenti risultati: l'84,4% degli allievi risponde correttamente al primo quesito, va però considerato che era a risposta chiusa con la scelta solo del sì o del no, quindi con una forte incidenza anche del fattore casuale di riuscita. Tra coloro che sbagliano l'11,8% degli allievi rispondono "Sì" e il 3,8% degli allievi fornisce risposte mancanti o da annullare. Nel secondo quesito il 92,2% degli allievi risponde correttamente, mentre le risposte scorrette si distribuiscono più o meno uniformemente nelle altre tre tipologie di risposte possibili. Il 3,6% degli allievi non risposte o fornisce risposte da annullare.

F3) Al mercatino di Natale del paese hanno partecipato anche le classi della scuola elementare. Ecco cosa ha proposto ogni classe sulla propria bancarella.

	I elem.	II elem.	III elem.	IV elem.	V elem.
Biscotti fatti in casa		X		X	X
Bigliettini di auguri	X		X		
Cioccolata calda			X		X
Decorazioni per l'albero		X		X	
Candele	X		X	X	
Porta-candele				X	X

La I elementare vende biscotti?

Risposta: …………………………………………………………………….

Risposta corretta:
No

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate	Mancante/ Non valida
No	**Sì**	
88,7	9,1	2,2

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

F4) Al mercatino di Natale del paese hanno partecipato anche le classi della scuola elementare. Ecco cosa ha proposto ogni classe sulla propria bancarella.

	I elem.	II elem.	III elem.	IV elem.	V elem.
Biscotti fatti in casa		x		x	x
Bigliettini di auguri	x		x		
Cioccolata calda			x		x
Decorazioni per l'albero		x		x	
Candele	x		x	x	
Porta-candele				x	x

Quale classe o quali classi vendono sia le candele sia i porta-candele?

Risposta: …………………….……………………………………………

Risposta corretta:
IV elementare

Risultati:

Risposta corretta	**Risposte errate**					**Mancante/ Non valida**
IV elementare	**II elementa-re**	**III elementare**	**V elementa-re**	**I elementare**	**Altro**	
73,8	0,5	0,5	0,5	0,2	17,6	6,9

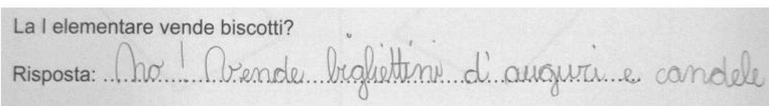
Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

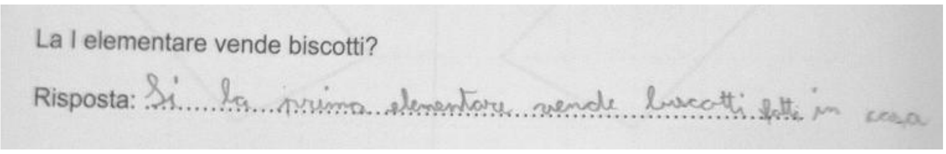
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Il terzo e quarto quesito di questo ambito/aspetto di competenza sono costituiti dalla stessa situazione, stessa tabella, ma vengono poste due domande diverse. Nel terzo viene chiesto se la classe I elementare vende biscotti, si tratta quindi di ricavare l'informazione dalla tabella a doppia entrata controllando un solo incrocio e di rispondere con un sì o un no. Nel quarto , invece, viene chiesto: "Quale classe o quali classi vendono sia le candele sia i porta-candele?", quindi si chiede di comprendere la correlazione "sia… sia" e di fare un confronto di più incroci tra righe e colonne della tabella a doppia entrata.

L'88,7% degli allievi risponde correttamente al terzo quesito, che coinvolge come in F1) solo risposte del tipo sì o no, quindi con un'alta probabilità di riuscita. Il 9,1% degli allievi sbaglia rispondendo "Sì", mentre il 2,2% degli allievi fornisce una risposta mancante o da annullare.

Di seguito riportiamo un protocollo di risposta corretta e uno relativo ad una risposta errata:

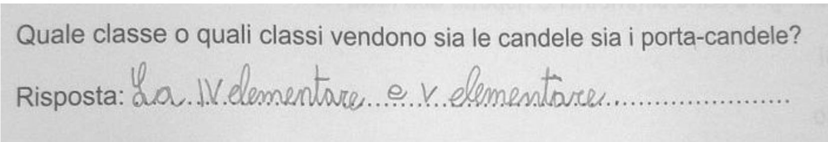

La I elementare vende biscotti?
Risposta: No! Vende bigliettini di auguri e candele


La I elementare vende biscotti?

Risposta: Sì la prima elementare vende biscotti fatti in casa

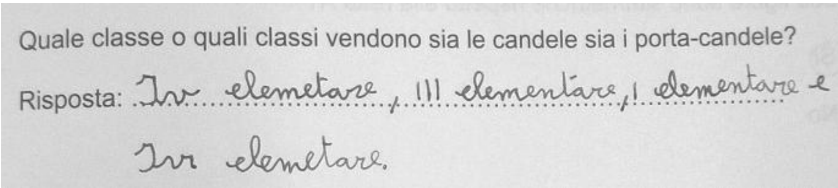
Al quarto quesito risponde correttamente il 73,8% degli allievi. Gli allievi che rispondono in modo errato a quest'ultimo quesito si distribuiscono in modo abbastanza uniforme tra le altre classi menzionate. Il 17,6% degli allievi rientra nella categoria "Altro", che comprende ad esempio risposte che prevedono più classi: "IV e V" il 3,3%; "I, III, IV, V" il 3,6%; "I, III, IV candele e IV, V porta candele" il 3,6%; "I, III, IV" l'1%.

Queste risposte potrebbero evidenziare difficoltà a interpretare il significato della correlazione "sia… sia" o di estrapolare le informazioni dalla tabella. Coloro che rispondono "I, III, IV, V" indicano le classi che vendono o le candele o i porta-candele, non contemporaneamente i due tipi di oggetti. Alcuni allievi avvertono la necessità di specificare le classi che vendono le candele e, separatamente, le classi che vendono i porta-candele. Di seguito riportiamo alcuni protocolli significativi:


Quale classe o quali classi vendono sia le candele sia i porta-candele?

Risposta: La IV elementare e V elementare

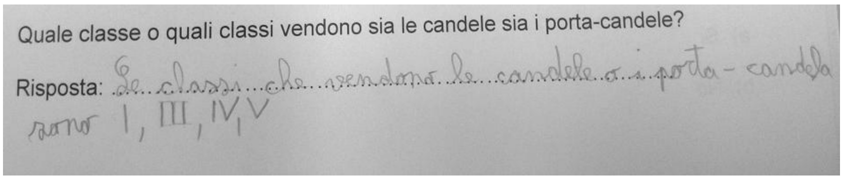
L'allievo scrive le classi in cui si vendono porta-candele.


Quale classe o quali classi vendono sia le candele sia i porta-candele?

Risposta: Iv elemetare, III elementare, I elementare e Iv elemetare.

L'allievo riporta le classi in cui si vendono le candele.

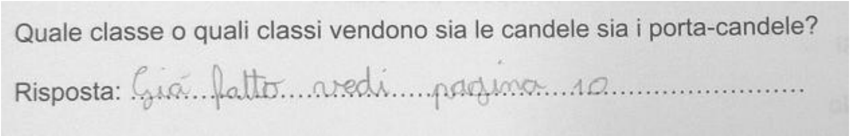
L'allievo seguente risponde correttamente alla domanda sbagliata: "Quali classi vendono le candele *o* i porta-candele?", confondendo quindi l'operazione logica di intersezione con quella di unione prevista dalla domanda del questionario.


Quale classe o quali classi vendono sia le candele sia i porta-candele?

Risposta: Le classi che vendono le candele o i porta-candela sono I, III, IV, V

Altre combinazioni di classi: "I e III", "III, IV e V", "I, IV e V" raggiungono il 2,4%. Risposte scorrette del tipo: "Sì", "No", "No vendono solo candele" invece si attestano al 3,1%.

È interessante il fatto che qualche allievo osserva: “Già fatto a pagina 10”,[10] ossia nel quesito F3) (0,5%). Riteniamo che per la motivazione degli allievi sia importante non consegnare le stesse situazioni.


Quale classe o quali classi vendono sia le candele sia i porta-candele?
Risposta: Già fatto vedi pagina 10

Risulta didatticamente importante utilizzare situazioni e rappresentazioni varie, per evitare l’insorgere di atteggiamenti, convinzioni e automatismi, riconducibili a fenomeni di contratto didattico stereotipati, che rendono gli apprendimenti dei ragazzi rigidi e privi di senso.

F5) Luigi è stato ricoverato sette giorni in ospedale.
Ogni giorno alle 7:00 e alle 17:00 passava l’infermiera a misurargli la temperatura.

	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
7:00	38°	38,5°	38,7°	39°	37,5°	36,5°	36,5°
17:00	39°	39°	38°	39°	38°	37°	36,5°

Durante quale giornata Luigi ha avuto la temperatura più alta sia al mattino sia alla sera?

Risposta: …………………………………………………………..……………..

Risposta corretta:
giovedì

Risultati:

Risposta corretta	**Risposte errate**							**Mancante/ Non valida**
Giovedì	**Martedì**	**Mercoledì**	**Venerdì**	**Lunedì**	**Domenica**	**Sabato**	**Altro**	
77,1	3,6	1,9	1,4	1,0	1,0	0,2	11,0	2,8

Programmi ’84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

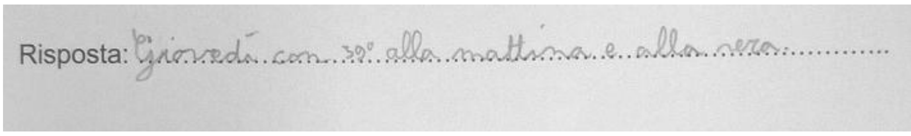
Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L’allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L’allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Anche il quinto quesito di questa tematica chiede di interpretare la correlazione “sia… sia” e di estrarre le informazioni dall’incrocio di diversi righe e colonne di una tabella a doppia en-

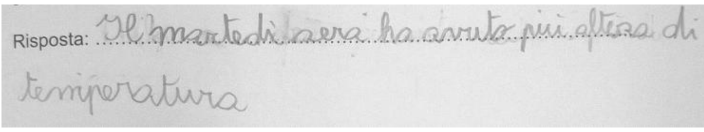
[10] La numerazione del fascicolo somministrato agli allievi è diversa rispetto a questa suddivisione in ambiti tematici, ma in ogni caso pur essendo i due quesiti somministrati non vicini (uno è il decimo e uno il 37-esimo del primo fascicolo), sono stati ritenuti uguali da alcuni allievi

trata. I risultati ottenuti sono stati buoni, dato che il 77,1% degli allievi risponde correttamente.

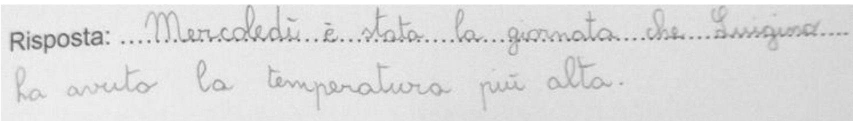
Di seguito riportiamo un protocollo di risposta completa e corretta:


Risposta: Giovedì con 39° alla mattina e alla sera

Tra coloro che sbagliano il 3,6% risponde martedì invece di giovedì, focalizzando l'attenzione solo sulla temperatura massima delle ore 17:00 e non anche su quella delle ore 7:00, non soddisfacendo così la correlazione posta, come testimonia il seguente protocollo:


Risposta: Il martedì sera ha avuto più altezza di temperatura

Gli altri allievi che forniscono soluzioni scorrette scelgono gli altri giorni della settimana, in modo più o meno uniforme.

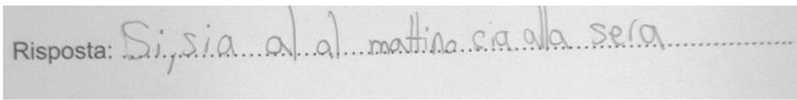

Risposta: Mercoledù è stata la giornata che Luigina ha avuto la temperatura più alta.

La tipologia "Altro" (11%) comprende risposte che riportano la temperatura, invece del giorno, ("39°", oppure "Al mattino 39° alla sera 39°", oppure temperature diverse da 39°) e questo dimostra una carenza di comprensione linguistica della richiesta.

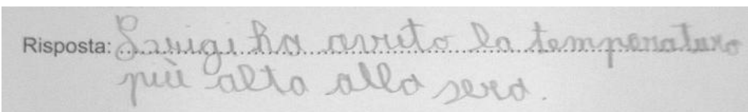

Risposta: 39°

Il 3,6% riporta frasi del tipo: "L'aveva di più" oppure "Alla sera" oppure "07:00"; invece il 3,8% risponde scrivendo più giorni: "Giovedì mattina, lunedì, martedì e giovedì sera" o "Lunedì, martedì e giovedì", rivelando analogamente al quesito F4) la stessa difficoltà di interpretazione del connettivo "sia… sia" o di difficoltà di lettura della tabella.

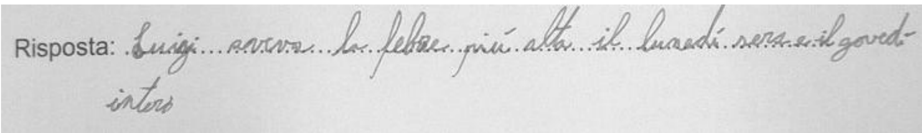
Di seguito riportiamo alcuni protocolli di alunni che hanno fornito una risposta errata.


Risposta: Si, sia al al mattino cia alla sera

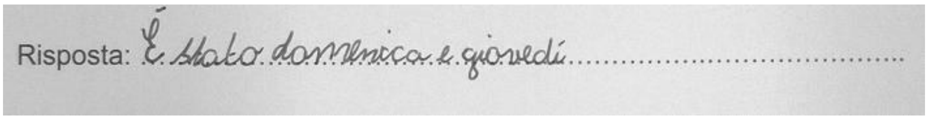
Nel protocollo seguente, oltre a non aver risposto alla domanda posta nel quesito lo studente fornisce un'informazione errata, dato che non tutte le sere Luigi ha avuto la temperatura più alta del mattino.


Risposta: Luigi ha avuto la temperatura più alta alla sera.

Nel seguente protocollo l'allievo riporta le sere (non tutte, manca il martedì) in cui la temperatura di Luigi è di 39°, rispondendo dunque ad una domanda di tipo diverso: "In quali giorni Luigi ha avuto la temperatura più alta?".


Risposta: Luigi... aveva... la febbre... più alta... il lunedì sera e il giovedì intero

Il seguente protocollo invece mostra come lo studente probabilmente interpreti il connettivo "sia… sia" con "la stessa temperatura", infatti osserviamo che il giovedì e la domenica sono gli unici due giorni della settimana in cui la temperatura misurata è la stessa sia al mattino che alla sera.


Risposta: È stato domenica e giovedì......................................

Solo il 2,8% degli allievi non risponde alla domanda o fornisce una risposta da annullare.

F6) Ecco una fattura della cartoleria per l'acquisto di materiale scolastico.

Cartoleria TICINO Via alle Scuole 527777 Matelandia		Fattura n.o 56/130 giugno 2011	
Quantità	Merce fornita	Prezzo_Unitario	Importo totale
215 175 175 115	Quaderni ufficiali Compassi KERN 4124 S Squadre plastica 45° 21 cm Gomma per inchiostro, CdA	1,10 Fr 17,70 Fr 1,90 Fr 1,30 Fr	236,50 Fr 3097,50 Fr 332,50 Fr 149,50 Fr
TOTALE			**3816,00 Fr**

Quanto costa una squadra?

Risposta: ……………………………………………………………………..

Risposta corretta:
1,90 Fr

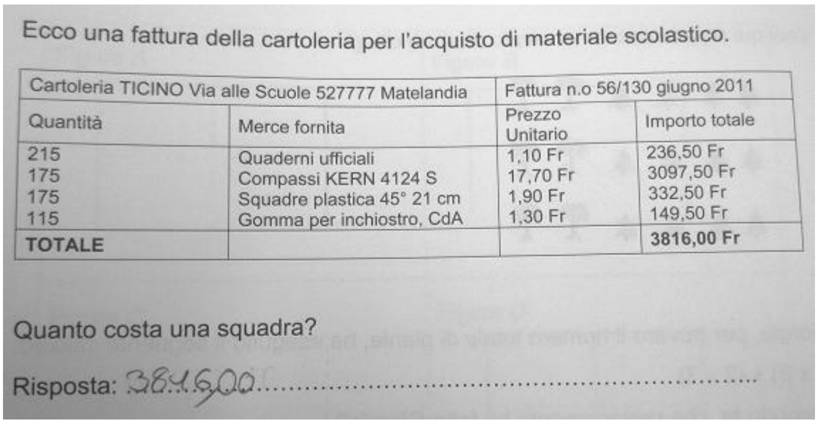
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate			Mancante/ Non valida
1,90 Fr	**3816,00 Fr**	**332,50 Fr**	**Altro**	
90,2	1,0	0,7	3,4	4,7

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

La tabella presente in questo quesito risulta densa di informazioni, espresse sia in forma linguistica che aritmetica, e richiede dunque una buona comprensione dei dati indicati. La domanda posta risulta abbastanza semplice. A questo quesito risponde correttamente il 90,2% degli allievi; ciò dimostra una buona competenza degli allievi nel saper selezionare informazioni da complesse tabelle. Tra coloro che sbagliano, l'1% degli allievi riporta il prezzo totale, la classica domanda che di solito viene posta nei problemi.


Ecco una fattura della cartoleria per l'acquisto di materiale scolastico.

Cartoleria TICINO Via alle Scuole 527777 Matelandia		Fattura n.o 56/130 giugno 2011	
Quantità	Merce fornita	Prezzo Unitario	Importo totale
215 175 175 115	Quaderni ufficiali Compassi KERN 4124 S Squadre plastica 45° 21 cm Gomma per inchiostro, CdA	1,10 Fr 17,70 Fr 1,90 Fr 1,30 Fr	236,50 Fr 3097,50 Fr 332,50 Fr 149,50 Fr
TOTALE			**3816,00 Fr**

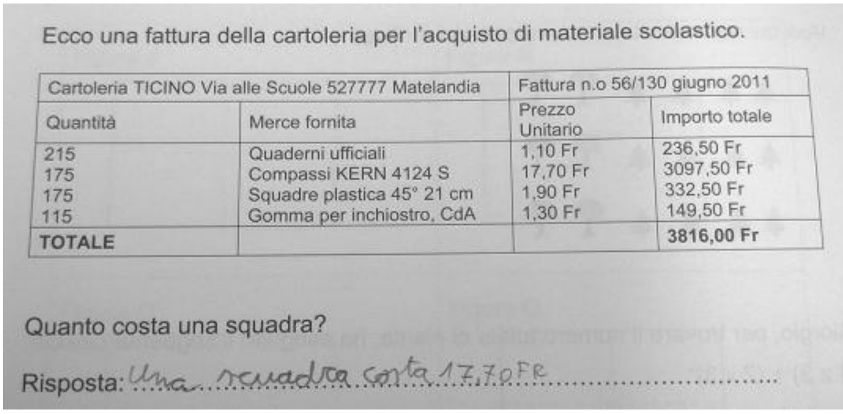
Quanto costa una squadra?

Risposta: 3816,00

Lo 0,7% degli allievi riporta il prezzo totale delle squadre e non il prezzo di una singola squadra.

Nella tipologia "Altro" rientrano sia numeri presenti nella tabella, sia numeri inventati. In particolare, lo 0,5% risponde 1,30 Fr, 17,70 Fr, 175,00 Fr.

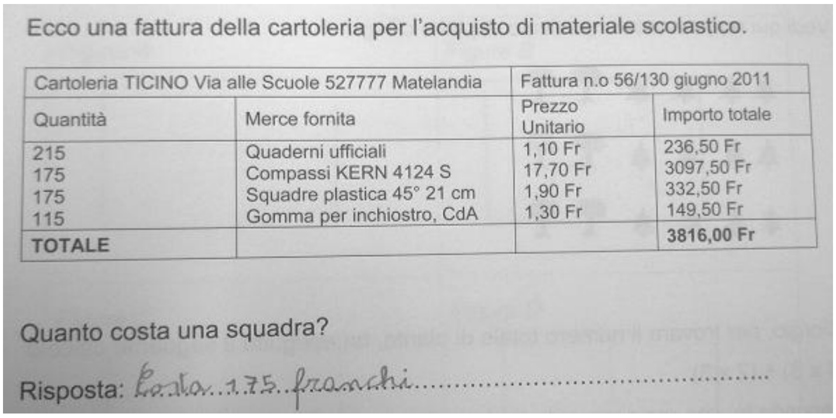
Riportiamo di seguito alcuni esempi:


Ecco una fattura della cartoleria per l'acquisto di materiale scolastico.

Cartoleria TICINO Via alle Scuole 527777 Matelandia		Fattura n.o 56/130 giugno 2011	
Quantità	Merce fornita	Prezzo Unitario	Importo totale
215 175 175 115	Quaderni ufficiali Compassi KERN 4124 S Squadre plastica 45° 21 cm Gomma per inchiostro, CdA	1,10 Fr 17,70 Fr 1,90 Fr 1,30 Fr	236,50 Fr 3097,50 Fr 332,50 Fr 149,50 Fr
TOTALE			**3816,00 Fr**

Quanto costa una squadra?

Risposta: Una scuadra costa 17,70 FR

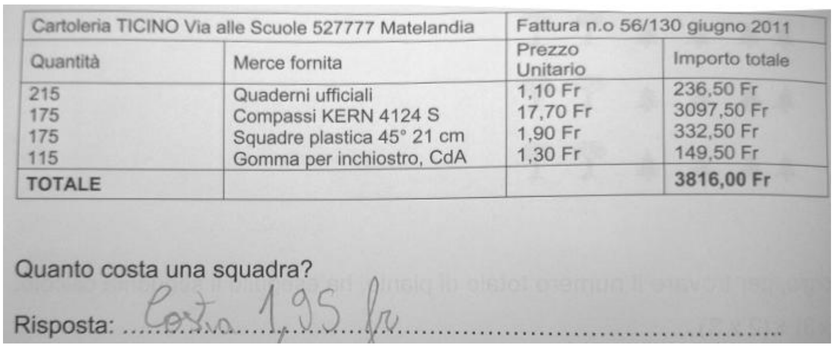

Ecco una fattura della cartoleria per l'acquisto di materiale scolastico.

Cartoleria TICINO Via alle Scuole 527777 Matelandia		Fattura n.o 56/130 giugno 2011	
Quantità	Merce fornita	Prezzo Unitario	Importo totale
215 175 175 115	Quaderni ufficiali Compassi KERN 4124 S Squadre plastica 45° 21 cm Gomma per inchiostro, CdA	1,10 Fr 17,70 Fr 1,90 Fr 1,30 Fr	236,50 Fr 3097,50 Fr 332,50 Fr 149,50 Fr
TOTALE			**3816,00 Fr**

Quanto costa una squadra?

Risposta: Costa 175 franchi

Mentre lo 0,3% risponde con numeri assenti direttamente nella tabella, come 0,10 Fr, 1,95 Fr, 19,00 Fr, 22,00 Fr, 190,00 Fr e 333,40 Fr.



Cartoleria TICINO Via alle Scuole 527777 Matelandia		Fattura n.o 56/130 giugno 2011	
Quantità	Merce fornita	Prezzo Unitario	Importo totale
215 175 175 115	Quaderni ufficiali Compassi KERN 4124 S Squadre plastica 45° 21 cm Gomma per inchiostro, CdA	1,10 Fr 17,70 Fr 1,90 Fr 1,30 Fr	236,50 Fr 3097,50 Fr 332,50 Fr 149,50 Fr
TOTALE			**3816,00 Fr**

Quanto costa una squadra?

Risposta: Costa 1,95 Fr

F7) Ecco i risultati di un torneo interscolastico di calcio al quale hanno partecipato le seguenti squadre:

- Prati
- Perle
- Onde
- Soli
- Palloncini
- Marziani

	Partite giocate	Partite vinte	Partite pari	Partite perse	Reti segnate	Reti subite	Punti
Prati	5	4	1	0	17	3	13
Perle	5	4	1	0	17	8	13
Onde	5	3	0	2	11	10	9
Soli	5	1	0	4	5	21	3
Palloncini	5	1	0	4	8	11	3
Marziani	5	1	0	4	5	10	3

Quale squadra ha subito più reti?

Risposta: ……………………………………………………………………..……..

Risposta corretta:
Soli

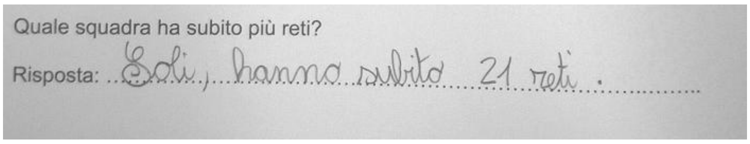
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate					Mancante/ Non valida
Soli	**Prati**	**Perle**	**Marziani**	**Onde**	**Palloncini**	
69,9	10,6	3,7	0,9	0,6	0,6	13,7

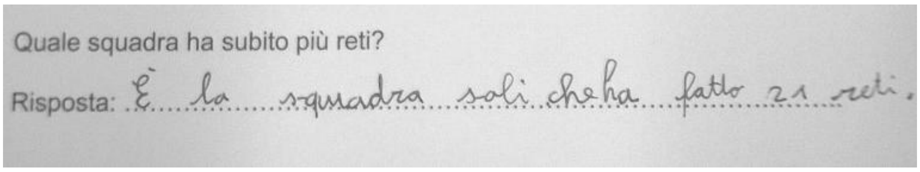
Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Il quesito richiede di individuare la squadra che ha subito più reti, ossia di controllare nella colonna delle “reti subite” il numero maggiore e di farlo corrispondere alla relativa squadra. La percentuale di risposte corrette nella lettura di questa tabella a doppia entrata scende un po’ rispetto ai precedenti quesiti (69,9%). Riportiamo un protocollo corretto come esempio:

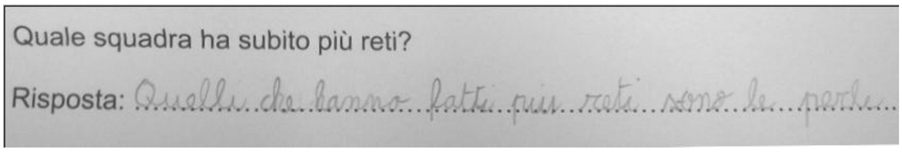

Quale squadra ha subito più reti?
Risposta: Soli, hanno subito 21 reti.

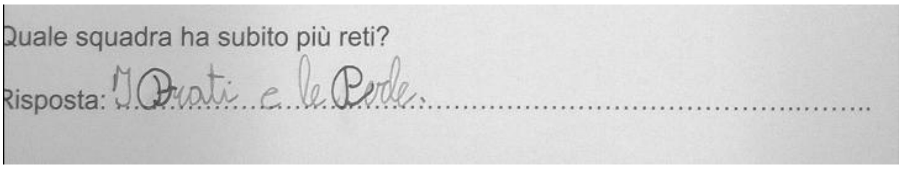
Il seguente protocollo riporta la risposta corretta (Soli), ma evidenzia una mancanza di comprensione del vocabolo “subire”.


Quale squadra ha subito più reti?
Risposta: È la squadra soli che ha fatto 21 reti.

Tra coloro che sbagliano il 10,6% risponde con la squadra Prati invece di Soli, squadra che rappresenta la prima dell’elenco e quella che ha segnato più reti, invece di averle subite, insieme alla squadra delle Perle che totalizza il 3,7% di risposte. Forse questa scelta deriva dal vissuto o da fattori affettivi, in effetti di solito si tende a parlare di chi ha segnato più goal piuttosto che chi ne ha subiti di più.

Nei seguenti due protocolli gli allievi rispondono alla domanda: “Quale squadra ha fatto più reti?”, invece della domanda: “Quale squadra ha subito più reti?”, sbagliando così la risposta.


Quale squadra ha subito più reti?
Risposta: Quelli che hanno fatti piu reti sono le perle


uale squadra ha subito più reti?
isposta: I Prati e le Perle.

Anche le altre squadre sono state scelte da alcuni allievi, inoltre va segnalato che il 13,7% degli alunni non fornisce alcuna risposta o fornisce una risposta da annullare. Il quesito è il 28-esimo di quelli somministrati nel primo fascicolo.

F8) Durante le vacanze alcuni bambini sono andati al cinema, a teatro, allo stadio.

	Cinema	Teatro	Stadio
Alice	X	X	
Brian		X	X
Kevin		X	
Elisa	X		X
Francesca	X	X	
Luana	X	X	
Marco			X

Quanti bambini sono andati sia al cinema sia a teatro?

Risposta: ………………………………………………………………...

Possibile risposta corretta:
3 oppure 3 bambini oppure Francesca, Alice, Luana.

Risultati:

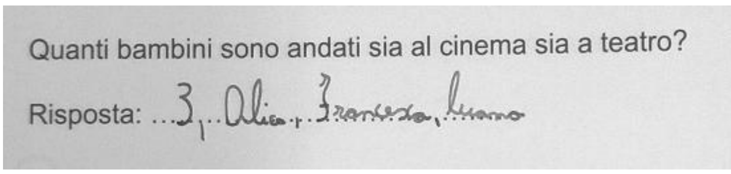
Risposta corretta	**Risposte errate**					**Mancante/ Non valida**
3 bambini oppure Francesca, Alice, Luana	**“5 bambini al teatro e 4 al cinema”**	**9 bambini**	**2 bambini**	**4 bambini**	**Altro**	
67,6	6,7	6,7	3,8	1,7	9,3	4,2

Programmi ’84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

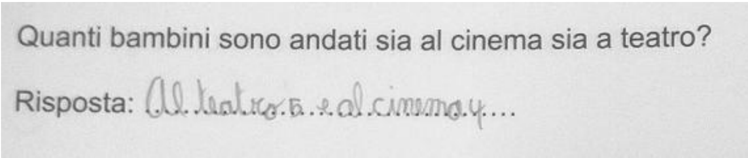
Nuovo piani di studio della scuola dell’obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L’allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L’allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Dato che la tipologia di quesiti in questa sessione rimane analoga, anche la percentuale di riuscita resta all’incirca confrontabile con quelle precedenti (67,6%). In particolare questo quesito è molto simile alla domanda F4); l’unica differenza è la richiesta quantitativa (“Quanti bambini”) contro la richiesta solo qualitativa della precedente domanda (“Quali classi”). Tra le risposte corrette il 51,6% ha risposto 3, risposta sicuramente più appropriata di “Francesca, Alice, Luana” (16%), anch’essa considerata valida, dato che la domanda richiedeva una risposta numerica in senso cardinale.

Di seguito riportiamo il protocollo di un allievo che fornisce la risposta sia dal punto di vista quantitativo che qualitativo:


Quanti bambini sono andati sia al cinema sia a teatro?
Risposta: …3,..Alice,.Francesca,Luana

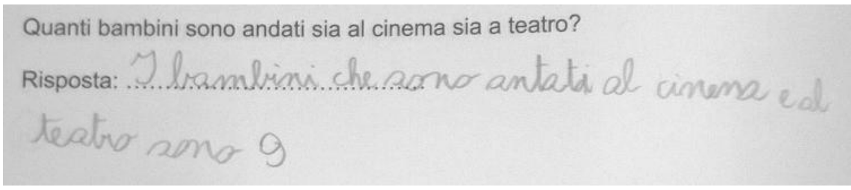
Tra le risposte errate il 6,7% degli allievi risponde “5 bambini al teatro e 4 al cinema”, percependo quindi le due informazioni disgiunte e non come intersezione dei due enunciati, come mostra il seguente protocollo.


Quanti bambini sono andati sia al cinema sia a teatro?

Risposta: Al teatro 5 e al cinema 4....

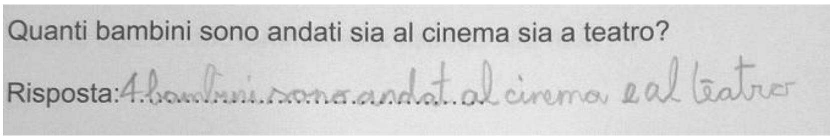
Continua quindi a ripresentarsi lo stesso errore riscontrato nei quesiti precedenti che coinvolgevano la correlazione “sia… sia”.

Il 6,7% degli allievi risponde 9, che si ottiene sommando il numero di bambini che sono andati al cinema con quelli che sono andati a teatro e sbagliando così ancora una volta a concepire il concetto di intersezione.


Quanti bambini sono andati sia al cinema sia a teatro?

Risposta: I bambini che sono antati al cinema e al teatro sono 9

Il 3,8% degli allievi e l’1,7% si avvicina alla risposta corretta affermando rispettivamente 2 e 4.


Quanti bambini sono andati sia al cinema sia a teatro?

Risposta: 4 bambini sono andat al cinema e al teatro

La categoria “Altro” rappresenta il 9,3% di risposte scorrette e in essa viene fornito il nome di una o due bambine (“Francesca e Luana”, “Alice”, “Alice e Francesca”, “Alice e Luana”) con il 3,5% e altri nomi di fantasia o altri numeri con il 5,8%. Il 4,2% degli allievi non fornisce la risposta o fornisce una risposta da annullare.

F9) La signora Rosa, che abita a Lucerna, desidera trascorrere il fine settimana a Lugano dalla figlia. Osserva l'orario ferroviario e aiutala a scegliere il treno che soddisfa le sue esigenze:

- partire il più tardi possibile;
- giungere a Lugano entro le 11:30.

Orario di partenza da Lucerna	Orario d'arrivo a Lugano
7:18	9:45
7:39	10:37
8:06	10:45
8:18	10:46
8:20	11:27
9:18	11:45

A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?

Risposta: …………………………………………………………

Risposta corretta:
8:20
oppure
Partenza 8:20/ Arrivo 11:27

Risultati:

Risposta corretta	**Risposte errate**				**Mancante/ Non valida**
8:20 oppure Partenza 8:20 Arrivo 11:27	**9:18**	**7:18**	**Orari diversi**	**Altro**	
63,6	10,7	1,9	9,6	2,3	11,9

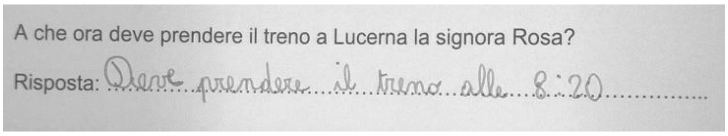
Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

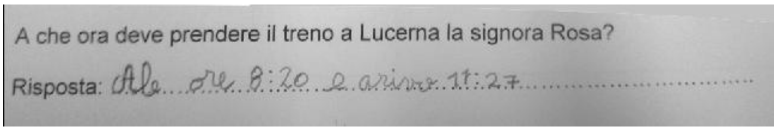
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Tra i quesiti di questa suddivisione tematica (interpretazione di tabelle), questo è quello che ottiene la percentuale di riuscita minore (63,6%). La domanda presenta un estratto del tabulato dell'orario dei treni che collegano Lucerna a Lugano. La competenza matematica sottesa a questo tipo di quesiti in generale non è di alto livello e ha una corrispondenza reale e immediata con le necessità della vita quotidiana. Più volte, anche in seguito all'analisi di prove internazionali, viene messa in evidenza l'importanza di saper decodificare informazioni grafiche per vagliare informazioni presenti sui giornali, media, internet... Nello specifico di questo quesito la difficoltà a rispondere correttamente può essere ricercata nel contesto posto dal problema - viaggiare in treno - che probabilmente non fa parte del vissuto di bambini di 9-10 anni. Infatti, anche se molti possono aver utilizzato questo mezzo di trasporto, probabilmente sono stati accompagnati da adulti che hanno deciso per loro. Gli allievi non posseggono dunque un'adeguata conoscenza delle cose del mondo relative a fare viaggi in treno, ossia non hanno un'adeguata *enciclopedia* che permetta loro di utilizzare le informazioni presenti nel testo in modo efficace (Zan, 2007b). Nonostante questa considerazione, riteniamo che la principale difficoltà in questo caso è quella di controllare contemporaneamente due condizioni: partire il più tardi possibile e arrivare a Lugano entro le 11:30. Forse sarebbe stato interessante inserire un orario del tipo: 8:25 – 11:31. Tra le risposte corrette il 9,1% specifica:

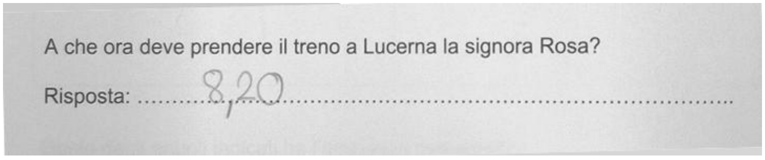
"Partenza 8:20 e Arrivo 11:27", mentre il 54,5% risponde solamente con la partenza "8:20", come richiesto dalla domanda.

Riportiamo due protocolli a mo' di esempio:


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?
Risposta: Deve prendere il treno alle 8:20


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?
Risposta: Alle ore 8:20 e arrivo 11:27

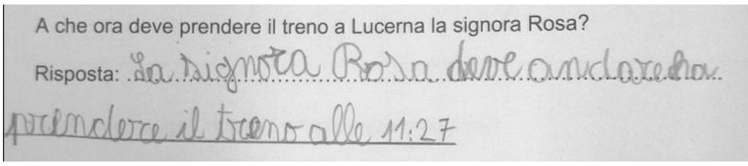
È interessante osservare che molti allievi indicano l'orario 8:20 utilizzando la rappresentazione con la virgola, come mostra il seguente protocollo:


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?
Risposta: 8,20

Questo potrebbe comportare errori durante la trattazione del sistema sessagesimale e nelle conversioni relative.

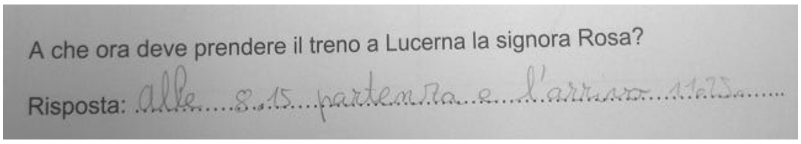
Tra coloro che sbagliano, il 10,7% degli allievi risponde con l'orario successivo a quello utile per arrivare in orario, soddisfacendo così solo la richiesta di partire il più tardi possibile, ma non quella di giungere a Lugano entro le 11:30, mentre l'1,9% risponde indicando l'orario del primo treno disponibile delle 7:18. Va segnalato che il 9,6% degli allievi indica orari diversi, tra i quali le 8:18 (lo 0,5% degli allievi), orario significativo per partire essendo quello che permette di soddisfare con maggiore certezza entrambe le richieste e che nel senso comune sarebbe quello maggiormente scelto (partenza all'incirca nello stesso orario, viaggio più corto, maggiore sicurezza di arrivare in orario).

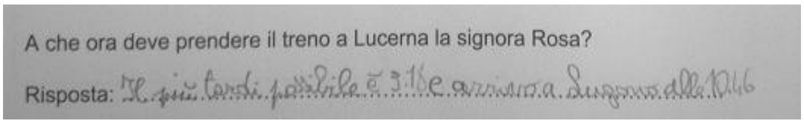
Nella categoria "Altro" rientrano andata e ritorno "sbagliati", ossia che non coincidono con quelli indicati dalla tabella, come mostra il seguente protocollo dove l'allievo riporta come orario di partenza le 11:27, confondendosi probabilmente nella lettura della tabella.


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?
Risposta: La signora Rosa deve andare da prendere il treno alle 11:27

Di seguito riportiamo altri protocolli di risposte errate.

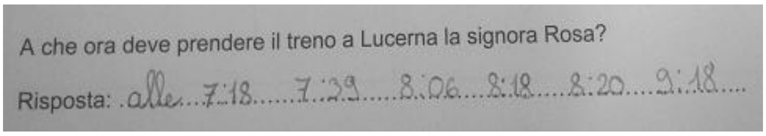
L'allievo indica un orario di partenza e di arrivo non presenti nella tabella:


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?
Risposta: Alle 8.15 partenza e l'arrivo 11:25


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?

Risposta: Il più tardi possibile è 9:18 e arriva a Lugano alle 10:46

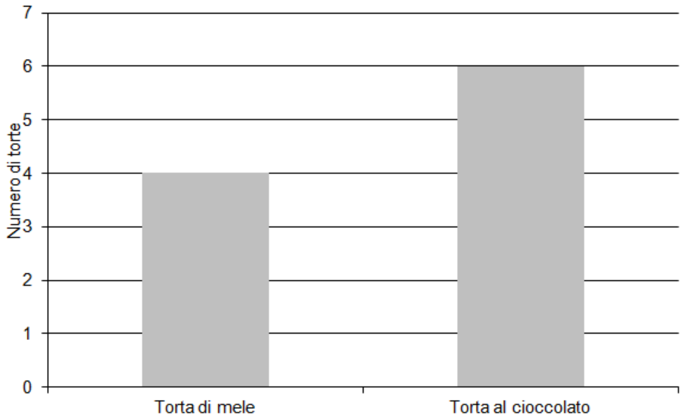
L'allievo indica tutti gli orari di partenza dei treni:


A che ora deve prendere il treno a Lucerna la signora Rosa?

Risposta: alle 7:18 7:29 8:06 8:18 8:20 9:18

7.2. Interpretazione di diagrammi a barre

F10) Kim prepara due tipi di torte: torte di mele e torte al cioccolato.



Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele. Quante in più?

Risposta: ……………………………………………………………………

Risposta corretta:
2

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate				Mancante/ Non valida
2	**"ha preparato più torte al cioccolato"**	**3**	**20**	**Altro**	
76,9	9,3	3,3	2,5	5,4	2,6

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Questa suddivisione tematica è legata alla lettura dei diagrammi a barre. In questo quesito si chiede di individuare la differenza tra le due barre che corrispondono al numero di torte di mele e di cioccolato. A questo quesito risponde correttamente il 76,9% degli allievi che individua le due torte al cioccolato che sono state preparate in più rispetto a quelle di mela.

Si riporta di seguito un esempio di soluzione corretta.

Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele.

Quante in più?

Risposta: Kim ha preparato 2 torte in più di cioccolato

$6-4=2$

In questo protocollo emerge una clausola del contratto didattico chiamata *esigenza della giustificazione formale* (egf), che rappresenta un meccanismo legato all'immagine della matematica, alle attese presupposte da parte dell'insegnante ecc. (D'Amore, 1999): «Non può bastare così, in matematica si devono sempre fare dei calcoli, la maestra se li aspetta di certo», che comporta che la risposta, pur essendo facilmente intuibile, debba essere accompagnata da calcoli che la giustifichino.

Nel seguente protocollo l'allievo risponde facendo esplicito riferimento alla differenza di altezze delle due barre nel diagramma, parlando però in modo improprio di grandezza della torta.

Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele.

Quante in più?

Risposta: La torta di ciocolato è più grande di due quadretti.

Tra coloro che forniscono una risposta scorretta, il 9,3% degli allievi risponde in modo non adeguato alla domanda del problema, ossia con una informazione già presente nel testo e che di solito rappresenta la domanda tipica che viene posta in questo tipo di rappresentazione: "Chi ha preparato più torte al cioccolato?". Riportiamo di seguito un protocollo come esempio:

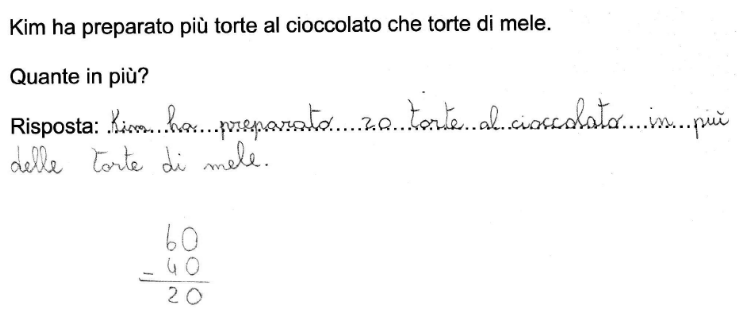
Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele.

Quante in più?

Risposta: più torte al cioccolato

Il 3,3% risponde 3, invece di 2, mentre il 2,5% risponde 20, che deriva dal considerare 60 le torte al cioccolato e 40 quelle di mele.

Riportiamo di seguito un protocollo come esempio che mostra la necessità di effettuare l'algoritmo in colonna anche nel caso di un semplice calcolo:


Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele.

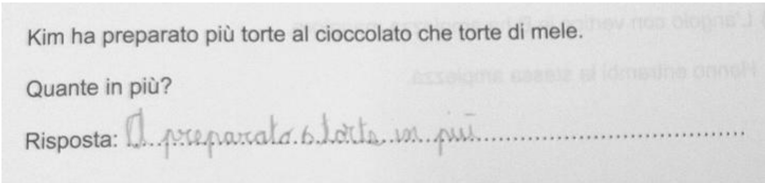
Quante in più?

Risposta: Kim ha preparato 20 torte al cioccolato in più delle torte di mele.

$$\begin{array}{r} 60 \\ -\ 40 \\ \hline 20 \end{array}$$

Nella categoria “Altro” si ritrovano le seguenti risposte: “4 e 6” lo 0,5%; numeri diversi da 2, ad esempio 1, 4, 6, 8, 10, 11, 18 e 30 il 4,2%; lo 0,7% risponde con frasi lontane dalla richiesta, come ad esempio “sì”, “la torta al cioccolato”.

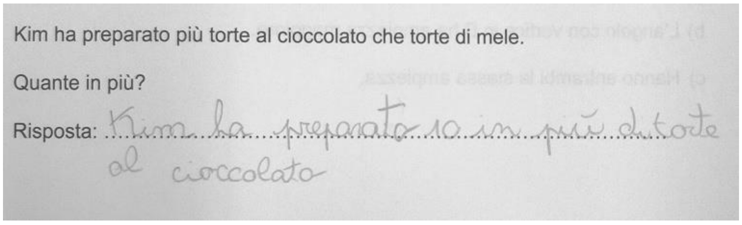
A mo’ di esempio di seguito si riporta un protocollo dove l’allievo indica il numero di torte al cioccolato e non la differenza tra quelle al cioccolato e le torte di mele.


Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele.

Quante in più?

Risposta: A preparato 6 torte in più

Nel seguente protocollo l’allievo scrive come risultato 10, ossia la somma delle due tipologie di torte, probabilmente derivante dal termine “più” presente nel testo per ben due volte.


Kim ha preparato più torte al cioccolato che torte di mele.

Quante in più?

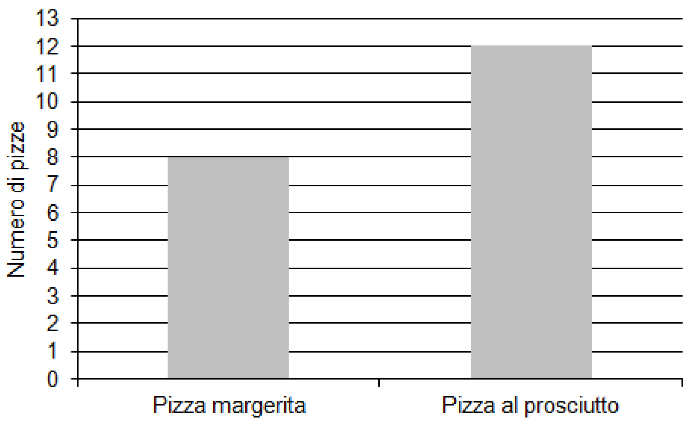
Risposta: Kim ha preparato 10 in più di torte al cioccolato

Come sostiene Zan (2012), i problemi scolastici standard di solito somministrati a scuola e le prassi didattiche ad esse collegate, fanno sì che gli allievi costruiscono degli atteggiamenti e comportamenti basati sul seguire scorciatoie cognitive (quali inferire direttamente dal testo le operazioni da fare) invece che rappresentarsi la situazione descritta e su tale rappresentazione costruire il processo risolutivo. D’altra parte, il fatto che tale strategia abbia successo in molti dei problemi della pratica scolastica a causa della loro struttura stereotipata fa sì che tale abitudine si consolidi in un atteggiamento verso il testo dei problemi: l’allievo si abitua a una lettura selettiva, caratterizzata dall’individuazione dei dati numerici e delle parole chiave, che suggeriscono come “combinare” i numeri presenti nel testo.

Nell’ambito dei problemi è didatticamente molto importante non fossilizzare l’attenzione degli allievi sulla ricerca di eventuali “parole chiave” (in tutto o più vuol dire che bisogna sommare, spende invece è legata a sottrarre, ecc.) che potrebbero richiamare un processo risolutivo, bensì di analizzare e comprendere le situazioni proposte o addirittura consegnare problemi dove alcune parole richiamano operazioni che però non risultano risolutive per la situazione posta.

Nello specifico di questo quesito, le ricerche in didattica della matematica evidenziano una resistenza da parte di alcuni allievi all’uso della sottrazione in situazioni considerate di non congruenza tra significato formale e significato intuitivo (Fischbein, 1985a; D’Amore, 1999). In particolare, la sottrazione presenta almeno due diversi significati intuitivi, togliere via e completamento a, a dispetto di un unico significato formale. Nel primo caso vi è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo, nel secondo caso sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive, che andrebbero però applicate con consapevolezza: «Quando si cerca di risolvere un problema non ci si affida soltanto al livello algoritmico, anche se tutto il bagaglio di algoritmi necessari è virtualmente presente nella mente. Come abbiamo già sottolineato, il processo risolutivo comprende anche il contributo delle rappresentazioni intuitive. Quando l'algoritmo e il livello intuitivo lavorano in accordo si ottiene una semplificazione. In questo caso il ruolo della rappresentazione intuitiva non si nota neppure, ma se tra i due livelli c'è una relazione di conflitto, l'incidenza degli aspetti intuitivi diventa evidente» (Fischbein, 1985a).

F11) Per una festa Gabriele ha comperato delle pizze.



Quante pizze al prosciutto ha comperato Gabriele?

Risposta: ……………………………………………………………..…………

Risposta corretta:
12

Risultati:

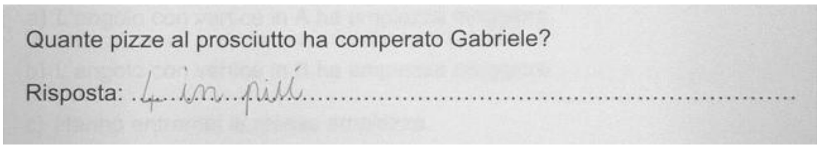
Risposta corretta	**Risposte errate**				**Mancante/ Non valida**
12	**"4 in più"**	**11**	**"ha comprato più pizza al prosciutto"**	**Altro**	
91,0	2,1	1,4	0,7	3,4	1,4

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare

Il quesito risulta molto semplice e intuitivo, in quanto richiede di individuare quante pizze al prosciutto ha acquistato Gabriele. Risponde in modo corretto il 91% degli allievi.

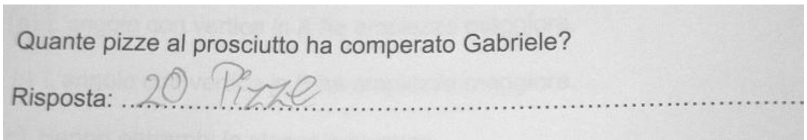
Tra coloro che rispondono in modo scorretto, il 2,1% risponde "4 in più", ossia con una risposta adeguata alla domanda precedente, ma non alla domanda posta in questo quesito.


Quante pizze al prosciutto ha comperato Gabriele?

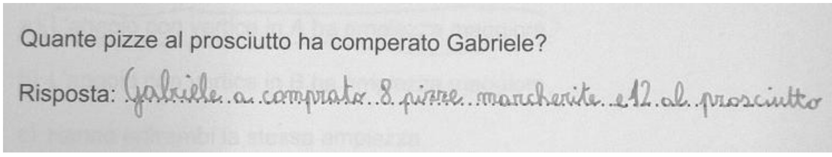
Risposta: 4 in più

L'1,4% risponde 11, manifestando di non leggere correttamente il valore corrispondente alle pizze al prosciutto comperate; lo 0,7% risponde in modo non adeguato alla domanda posta: "Ha comprato più pizza al prosciutto", dimostrando di non interpretare correttamente il senso della domanda. Nella categoria "Altro" è presente: il valore 20 con lo 0,7%; la risposta "Gabriele ha comperato 5 pizze in più" con lo 0,6% e la risposta "Ha comprato 12 pizze al prosciutto e 8 margherita" con lo 0,5%; inoltre le risponde 5, 13 e 120 con lo 0,2% degli allievi.

Di seguito riportiamo alcuni protocolli come esempio:

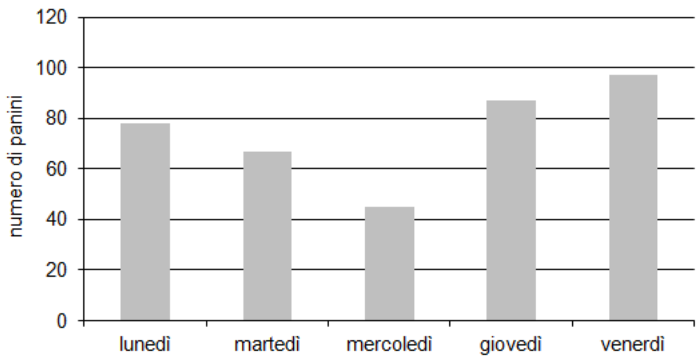

Quante pizze al prosciutto ha comperato Gabriele?

Risposta: 20 Pizze


Quante pizze al prosciutto ha comperato Gabriele?

Risposta: Gabriele a comprato 8 pizze marcherite e 12 al prosciutto

F12) Il grafico rappresenta la quantità di panini venduti da una quarta media durante le pause.



Una delle seguenti frasi è vera. Quale?

a) Lunedì la classe ha venduto meno panini di martedì.
b) Tutti i giorni la classe ha venduto più di 40 panini

Risposta corretta: b

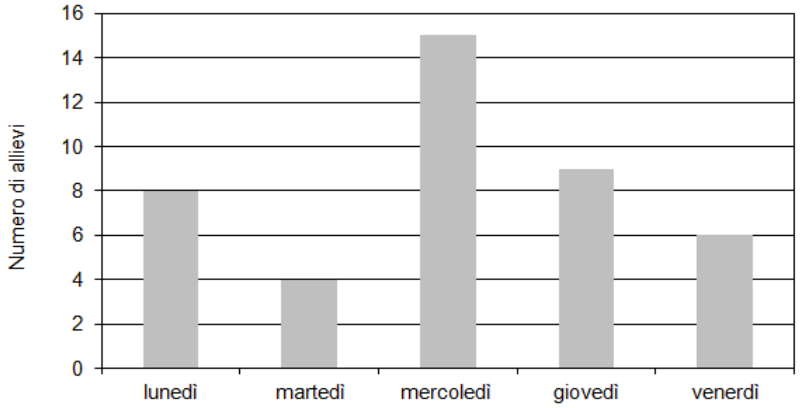
Risultati:

a	b	Mancante/ Non valida
3,8	95,0	1,2

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

F13) Il seguente grafico rappresenta il numero di allievi di una classe che nei vari giorni della settimana ha degli impegni fuori scuola (per esempio sport o musica).



In quale giorno ci sono meno allievi che hanno degli impegni fuori scuola?

Risposta: …………………………………………………………

Risposta corretta:
Martedì

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate		Mancante/ Non valida
Martedì	**Mercoledì**	**4**	
87,8	11,2	0,5	0,5

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

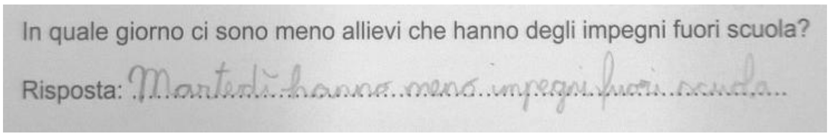
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – *Aspetto di competenza: Eseguire e applicare*
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

I due quesiti F12) e F13) sono basati su situazioni rappresentate con diagrammi a barre molto simili tra loro. Nel primo vi è una domanda a risposta chiusa che chiede di valutare quale tra le due affermazioni riportate è quella corretta; entrambe le affermazioni richiedono il confronto tra diverse barre. Mentre il secondo quesito, formulato in modo da richiedere una risposta aperta univoca, chiede di individuare il giorno della settimana in cui meno allievi hanno impegni fuori dalla scuola, quindi di individuare la barra più bassa e di associarla al relativo giorno della settimana.

Al primo quesito risponde correttamente il 95% degli allievi, la quasi totalità. Va comunque segnalato che essendo presenti solo due opzioni di scelta può essere rilevante la percentuale di risposte fornite in modo casuale. Tra coloro che sbagliano, il 3,8% sceglie l'altra opzione e il 2,2% degli allievi non risponde o fornisce una risposta da annullare.

Al secondo quesito risponde correttamente l'87,8%, che individuano il giorno nel quale meno allievi hanno impegni fuori dalla scuola.

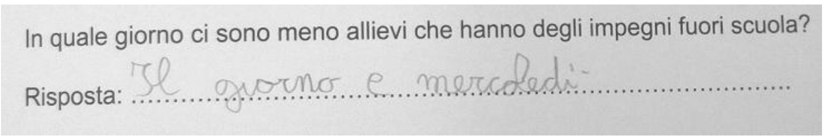
È interessante notare che non pochi allievi che rispondono correttamente il giorno martedì, lo identificano come il giorno in cui gli allievi della classe hanno meno impegni fuori scuola e non come il giorno in cui meno allievi hanno impegni fuori scuola, evidenziando una non piena comprensione del diagramma.


In quale giorno ci sono meno allievi che hanno degli impegni fuori scuola?

Risposta: Martedì hanno meno impegni fuori scuola

L'11,2% degli allievi risponde con il giorno della settimana in cui vi sono più allievi che hanno impegni fuori dalla scuola, e non meno, manifestando poca attenzione alla lettura e comprensione della domanda.

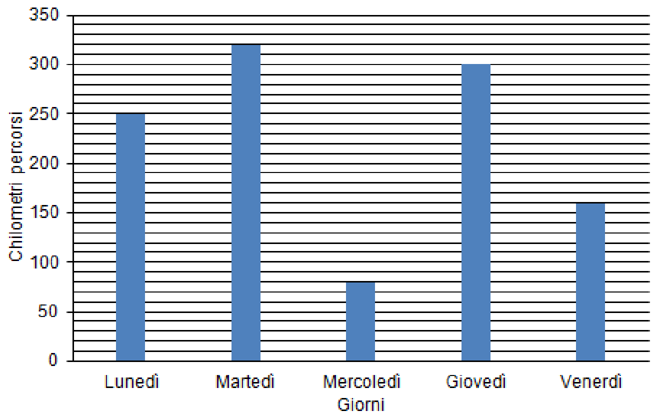
Di seguito riportiamo un protocollo come esempio:


In quale giorno ci sono meno allievi che hanno degli impegni fuori scuola?

Risposta: Il giorno e mercoledì

Solo lo 0,5% degli allievi non risponde alla domanda o fornisce una risposta da annullare.

F14) Mauro è un autista e annota ogni giorno il numero di chilometri percorsi con il suo autobus.



Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

Risposta: ....

Possibile risposta corretta:
80

Risultati:

Risposta corretta	Risposte errata						Mancante/ Non valida
80	**53**	**320**	**70**	**8**	**90**	**Altro**	
45,7	12,6	3,8	3,1	2,4	1,9	13,3	17,2

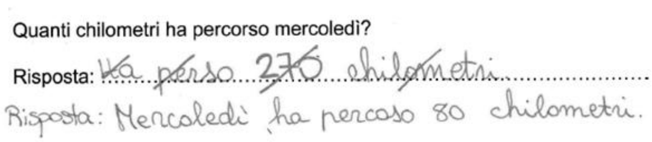
Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

Questo quesito presenta una rappresentazione a barre dove si chiede di individuare quanti chilometri ha percorso Mauro il mercoledì.

A questo quesito risponde correttamente il 45,7% degli allievi, una percentuale piuttosto bassa rispetto ai risultati avuti nei quesiti precedenti.

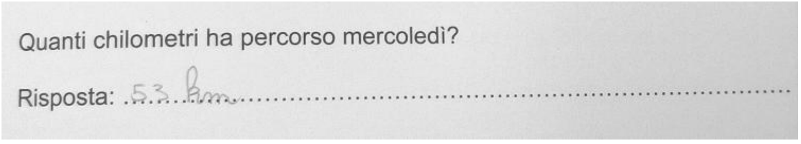
Di seguito si riporta un protocollo di risposta corretta che evidenzia un ripensamento da parte dell'allievo, che sembra inizialmente aver interpretato la richiesta del quesito in modo scorretto, forse leggendo "perso" invece di "percorso", come si evince dalla risposta cancellata. I 270 km, infatti, corrispondono alla differenza tra 350 km, il massimo numero di chilometri indicato, e 80 km che rappresentano quelli percorsi il mercoledì. Una rilettura più attenta del quesito ha permesso di effettuare la correzione.


Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

Risposta: ~~Ha perso 270 chilometri~~

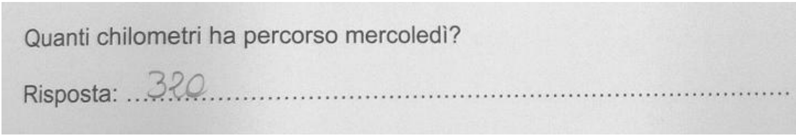
Risposta: Mercoledì ha percorso 80 chilometri.

Tra coloro che rispondono in modo scorretto, il 12,6% risponde 53, manifestando l'incapacità di capire l'unità di misura della tabella, ossia questi allievi individuano ogni tacca successiva al 50 come unità invece di decine. Uno degli obiettivi della domanda infatti era indagare la capacità di interpretare la scala sull'asse verticale, senza lasciarsi fuorviare da effetti di tipo percettivo.


Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

Risposta: 53 km

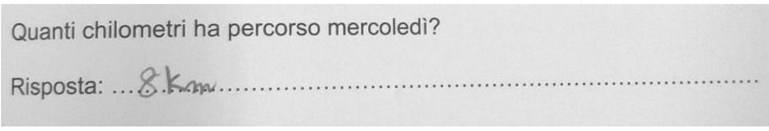
Il 3,8% risponde 320, riportando il numero massimo di km percorsi in un giorno e quindi non rispondendo alla domanda posta.


Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

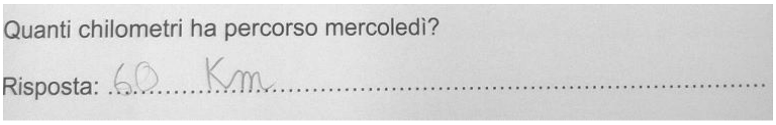
Risposta: 320

Il 3,1% degli allievi risponde 70 invece di 80, mettendo in evidenza un conteggio scorretto delle tacche, che in effetti non risultavano di semplice lettura dal punto di vista percettivo; il 2,4% risponde 8, ossia il numero di tacche e non il numero corrispondente alla richiesta e l'1,9% risponde 90, valore vicino a quello corretto e forse derivante da una lettura sbagliata della tabella come nel caso della risposta 70. Nella categoria "Altro" rientrano le risposte 54, 55 e 98 con l'1,2%, 52, 56 e 60 con l'1%, il 50 e 58 con lo 0,7%; inoltre vi sono altri risultati ciascuno con una bassissima percentuale di risposta.

Di seguito si riportano alcuni protocolli di risposte errate:

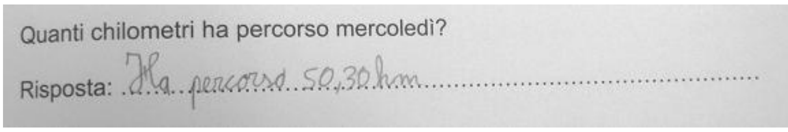

Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

Risposta: 8 km


Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

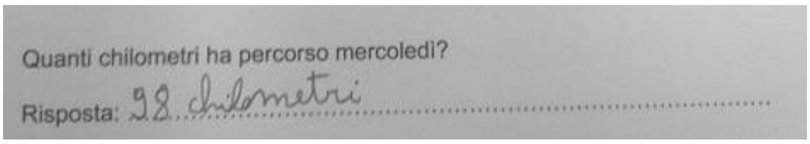
Risposta: 60 Km

Nel seguente protocollo l'allievo considera il valore delle tre tacche dopo il 50 pari a 0,1 km ciascuno.


Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

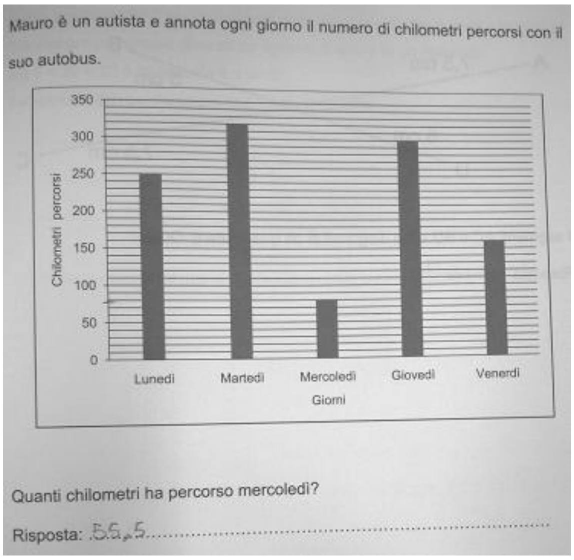
Risposta: Ha percorso 50,30 km

Nel seguente protocollo presumibilmente l'allievo focalizza l'attenzione sul 100 e poichè la barra arriva a due tacche prima del 100, risponde 98, attribuendo a ciascuna tacca il valore 1.

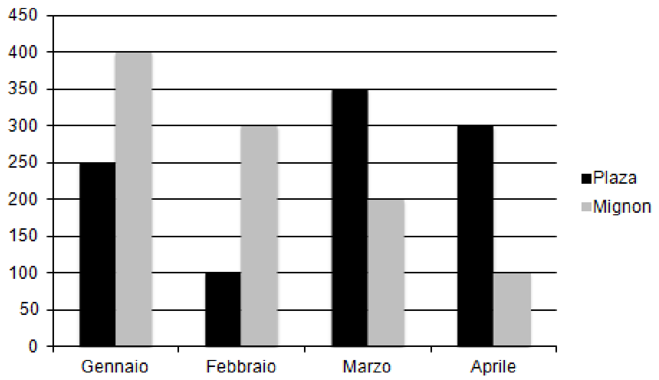

Quanti chilometri ha percorso mercoledì?

Risposta: 98 chilometri

Nel protocollo qui a fianco l'allievo riporta come risposta 55,5; dal segnetto grafico che l'alunno ha inserito tra 50 e 100 sulle ordinate, possiamo dedurre che probabilmente l'alunno ha identificato il valore di ogni tacca con 2.



F15) Il grafico rappresenta il numero degli spettatori dei cinema Plaza e Mignon nei primi quattro mesi dell'anno.



Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Nel mese di febbraio e nel mese di aprile il cinema Plaza ha avuto lo stesso numero di spettatori.
b) Nel mese di marzo i due cinema hanno avuto lo stesso numero di spettatori.
c) Nel corso dei quattro mesi i due cinema hanno avuto complessivamente lo stesso numero di spettatori.
d) In ogni mese il cinema Mignon ha avuto più spettatori del cinema Plaza.

Risposta corretta: c

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
21,4	3,5	39,6	8,5	27,0

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

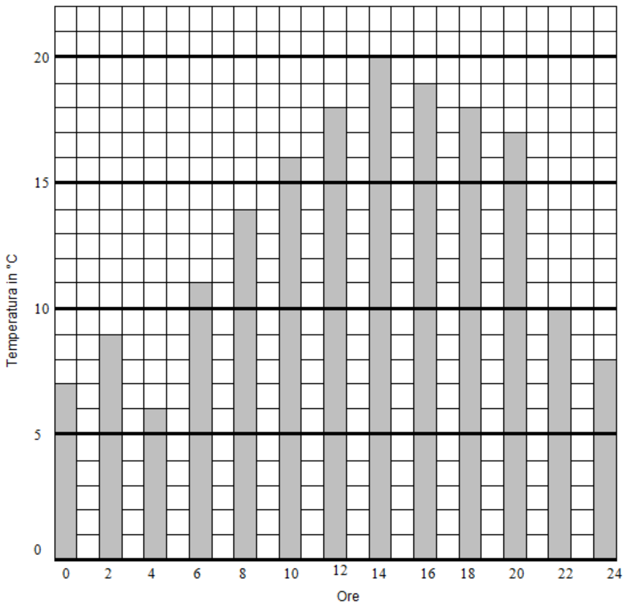
Il quesito chiede di tener conto di varie informazioni. Due tipi di cinema a confronto, per i quali occorre far riferimento a una legenda, 4 diversi mesi, affermazioni diverse per le quali controllare la veridicità. Tale quesito, a cui risponde correttamente il 39,6% degli allievi, è quello che in questo ambito ha registrato risultati peggiori, sia tra le domande a risposta chiusa che tra quelle a risposta aperta. Rispetto agli altri quesiti, questo richiede senza dubbio una maggior capacità di gestire e analizzare informazioni di tipo diverso.

Evidentemente la capacità di base di leggere un grafico o una tabella non viene poi fatta crescere attraverso l'acquisizione di strumenti, tecniche e operatività via via più elaborate, necessarie per far fronte alla rappresentazione e alla manipolazione di dati sempre più complessi. Per interpretare un grafico l'allievo deve gestire una moltitudine di informazioni che in genere comprendono testi, legende, assi, etichette, ma anche elementi percettivi come sfondi colorati e schemi. Spesso è necessario considerare la correlazione di questi elementi per poterne dedurre informazioni matematiche. Negli studi di Hittleman (1985) e Carpenter e Shah (1998) si mostra come agli alunni di scuola elementare crei particolari ostacoli il passaggio da un registro verbale ad uno grafico. Il grado di difficoltà che gli studenti poi possono incontrare varia a seconda della complessità del grafico, del contenuto matematico e della competenza legata alla richiesta del quesito (Lowrie, Diezmann, 2009).

Circa 1 studente su 4 ha scelto l'opzione a) (21,4%) che afferma: "Nel mese di febbraio e nel mese di aprile il cinema Plaza ha avuto lo stesso numero di spettatori". Effettivamente nei mesi di febbraio e aprile il diagramma mostra due rettangoli della stessa altezza, ma con colori diversi, ossia riferiti ai due diversi cinema. Inoltre si deve tener conto anche del fatto che statisticamente la prima opzione è quella più scelta tra chi non sa la risposta corretta. L'8,5% e il 3,5% scelgono rispettivamente l'opzione d) e b). Va segnalato che ben il 27% degli allievi non fornisce alcuna risposta o ne sceglie più di una, anche perchè il quesito rappresenta il 58-esimo dei 60 somministrati.

7.3. Interpretazione di istogrammi

F16) Nel grafico sono rappresentate le temperature misurate nel corso di un'intera giornata e nello stesso posto, ogni due ore.



Quale temperatura è stata registrata alle ore 12?

Risposta: ……………………………………………………..………………

Possibile risposta corretta:
18 °C oppure 18 gradi

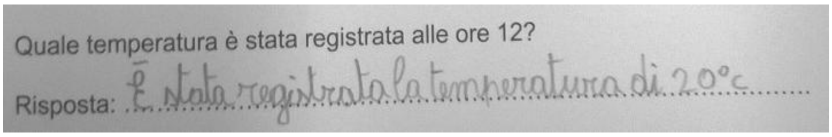
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate					Mancante/ Non valida
18 °C o 18 gradi	**17 °C**	**20 °C**	**19 °C**	**Temperatura diversa**	**Altro**	
67,6	7,9	2,9	1,9	8,1	3,5	8,1

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

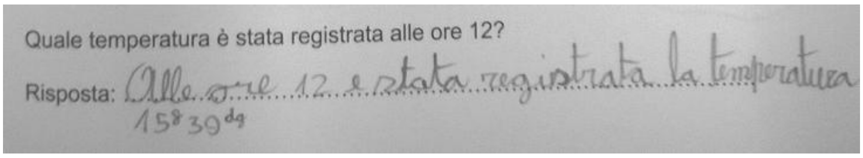
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

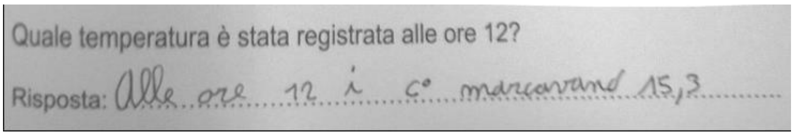
Nel quesito viene presentata una situazione che ricorrerà anche in quelli successivi con lo scopo di individuare diversi valori negli stessi istogrammi rappresentati: in questo la temperatura ad una certa ora, in F17) l'ora associata alla temperatura minima e in F18) l'ora associata ad una temperatura data. Dal punto di vista della motivazione degli allievi conveniva variare le situazioni, anche perché alcuni allievi hanno sostenuto di averlo già fatto, avendo già letto il contesto, sottovalutando così la richiesta. A questo quesito risponde correttamente il 67,6% degli allievi. Tra coloro che forniscono una risposta scorretta, il 7,9% degli allievi risponde 17 °C, commettendo presumibilmente un errore di lettura del grafico, il 2,9% degli allievi individua il valore massimo (20 °C), corrispondente alle ore 14 e non alle ore 12.


Quale temperatura è stata registrata alle ore 12?
Risposta: È stata registrata la temperatura di 20°c

L'1,9% risponde 19 °C. La categoria "Temperatura diversa" comprende: 28 °C con l'1,2%; 15,3, 12 e 23 °C con l'1%; 6 °C, 7 °C e 16 °C con lo 0,7%; altre risposte varie con percentuali molto basse, pari complessivamente all'1,9%.

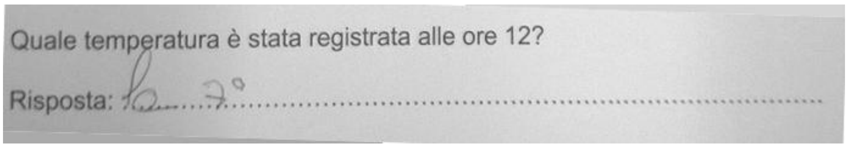
Nei seguenti due protocolli emergono le difficoltà degli allievi a identificare in modo corretto il valore delle tre tacche dopo il 15.


Quale temperatura è stata registrata alle ore 12?
Risposta: Alle ore 12 è stata registrata la temperatura

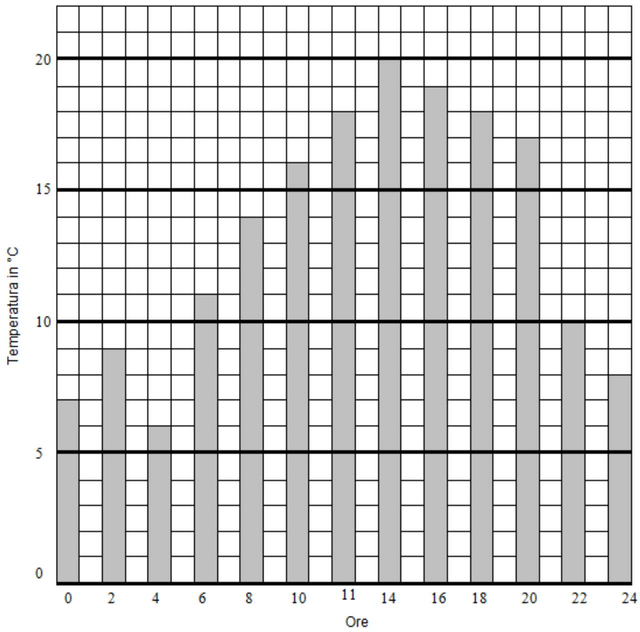

Quale temperatura è stata registrata alle ore 12?
Risposta: Alle ore 12 i c° marcavano 15,3

Nella categoria "Altro" rientrano risposte incomplete o generiche del tipo: "Tra i 15 e i 20", "La temperatura che è stata registrata alle ore 12 è la numero 7" (la temperatura alle ore 12 rappresenta in effetti la settima rilevata), "quella più alta" con il 3,5%.

Si riporta di seguito l'esempio di un protocollo in cui l'allievo indica il numero ordinale della barra che rappresenta la temperatura alle ore 12:


Quale temperatura è stata registrata alle ore 12?
Risposta: la 7°

F17) Nel grafico sono rappresentate le temperature misurate nel corso di un'intera giornata e nello stesso posto, ogni due ore.



A che ora è stata registrata la temperatura minima?

Risposta: ………………………………………………………………

Possibile risposta corretta:
alle ore 4:00
oppure alle ore 4

Risultati:

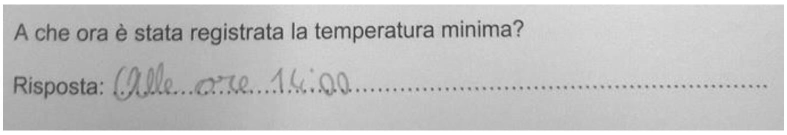
Risposta corretta	**Risposte errate**					**Mancante/ Non valida**
4	**14**	**6**	**20**	**2**	**Altro**	
66,7	8,1	5,0	2,1	1,2	5,0	11,9

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

In questo secondo quesito della suddivisione tematica "Interpretazione di istogrammi" viene presentata la stessa situazione precedente ma viene domandata l'ora in cui è stata registrata la temperatura minima. Va osservato che vi è un errore di battitura nel quesito somministrato: c'è scritto 11 invece di 12 sulle ascisse, ma questo non dovrebbe aver influenzato il risultato degli allievi che coinvolgeva altre parti del grafico. Si ritiene che in ogni caso conveniva annullarlo. Le risposte corrette ottenute sono confrontabili con quelle del quesito precedente (67,6%), essendo la situazione analoga. Tra le risposte scorrette troviamo: 14:00 con l'8,1%, che corrisponde all'orario in cui si è registrata la temperatura massima e non la minima, mostrando anche in questo caso un'errata comprensione del testo o superficialità nel supporre la domanda senza analizzarla in profondità.

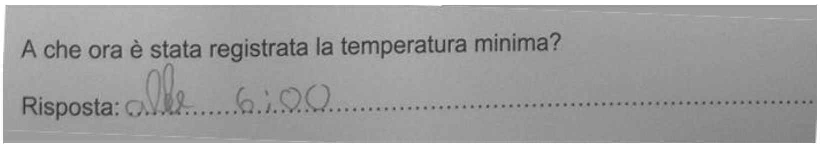
Di seguito riportiamo un protocollo come esempio:


A che ora è stata registrata la temperatura minima?

Risposta: alle ore 14:00

Come affermano Lowrie e Diezmann (2009), gli elementi utilizzati nella costruzione di un grafico hanno un impatto su come gli allievi comprendono e interpretano la richiesta del quesito e quindi influenzano il loro successo nella risposta e nella scelta di strategie appropriate per la risoluzione. È probabile che gli aspetti strettamente matematici richiesti in un quesito, in questo caso il concetto di minimo, non rappresentino una criticità per l'allievo, bensì lo siano gli aspetti legati alla componente grafica. Le performance potrebbero dunque essere una misura della loro inabilità a comprendere la componente grafica del quesito, piuttosto che la loro conoscenza degli aspetti matematici richiesti. D'altronde l'ambito/aspetto di competenza in cui gli allievi sono valutati è proprio "Analisi dati e relazioni – Sapere riconoscere e descrivere".

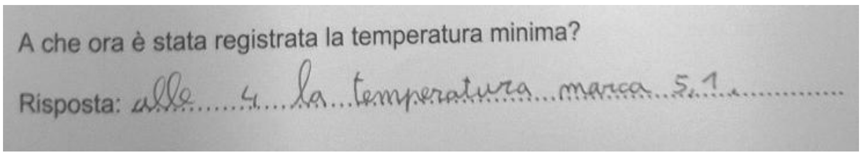
Il 5% degli allievi risponde 6 e non 4, tra questi la metà specifica: "La temperatura minima è di 6 gradi", rivelando dunque una corretta lettura del grafico, ma un disaccordo tra domanda e risposta, visto che viene riportato il valore della temperatura invece dell'orario.


A che ora è stata registrata la temperatura minima?

Risposta: alle 6:00

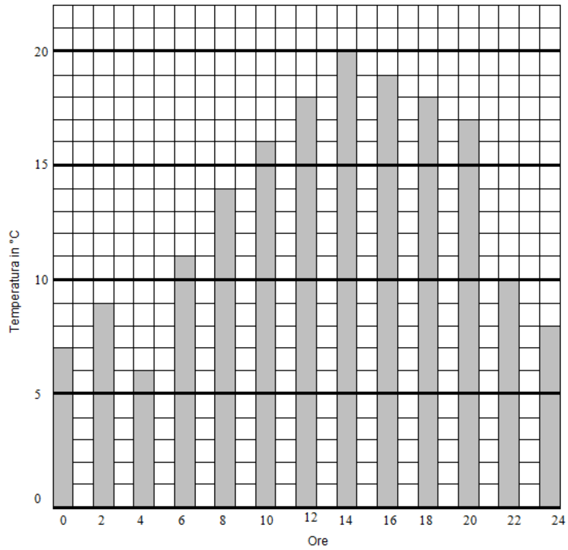
Il 2,1% riporta la temperatura massima, invece della minima, specificando in modo esplicito: "La temperatura massima è di 20 gradi"; l'1,2% riporta il valore 2, vicino al 4. Nella categoria "Altro" rientrano le seguenti risposte: "400" con l'1% (si ipotizza che lo studente forse non abbia inserito i due punti nell'orario); "0" con lo 0,7%; "22" con lo 0,5%; 7°C, 9:00, 10:00, 11:00, 16, 24:00, 17:00 con lo 0,2%; risposte con altri numeri che non indicano orari con lo 0,7%.

Riportiamo di seguito alcuni protocolli interessanti. Nel seguente, l'allievo risponde in modo corretto (ore 4) ma mostra un'incapacità nella lettura del grafico. L'allievo afferma che la temperatura minima registrata è di 5,1, mostrando dunque una scorretta interpretazione del valore delle tacche. L'analisi dei protocolli ha rilevato che questo errore è piuttosto frequente.


A che ora è stata registrata la temperatura minima?

Risposta: alle 4 la temperatura marca 5.1

F18) Nel grafico sono rappresentate le temperature misurate nel corso di un'intera giornata e nello stesso posto, ogni due ore.



A che ora è stata registrata la temperatura di 16°?

Risposta: ……………………………………………………………………

Possibile risposta corretta:
Alle ore 10:00
oppure alle ore 10

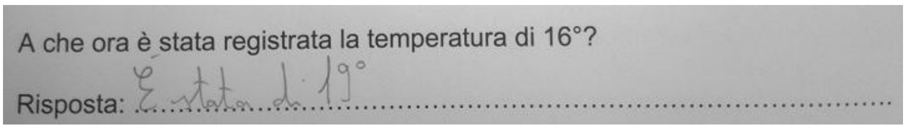
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate					Mancante/ Non valida
10	**19**	**8**	**12**	**Orari diversi**	**Altro**	
69,5	5,7	1,9	1,4	3,8	2,1	14,0

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

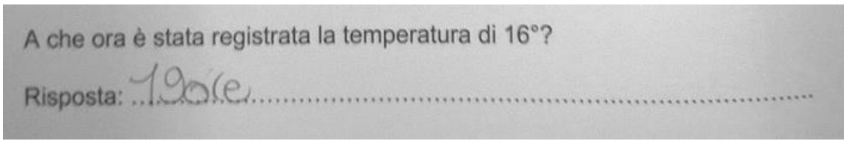
Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

In questo terzo quesito relativo alle temperature viene chiesto di individuare l'ora associata ad una temperatura data. La percentuale di risposte corrette è analoga alle precedenti due rilevate (69,5%). Tra coloro che forniscono una risposta scorretta, il 5,7% risponde 19, indicando i gradi che si ottengono alle ore 16. Tra questi l'1,7% esplicita "19 gradi", manifestando un'inversione nella lettura del grafico: vengono confuse le ore inserite sull'ascissa con la temperatura e viceversa.


A che ora è stata registrata la temperatura di 16°?

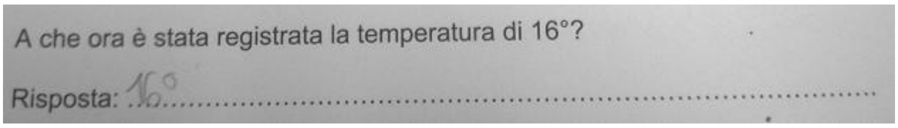
Risposta: È stata di 19°

Qualche allievo invece esplicita “19 ore” mescolando le informazioni.


A che ora è stata registrata la temperatura di 16°?

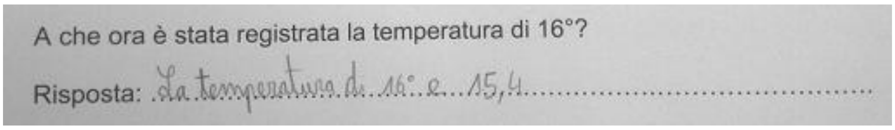
Risposta: 19ore

Le altre risposte scorrette si distribuiscono tra diversi valori. Nella categoria “Orari diversi” rientrano le risposte: “16:00” e “18:00” con l’1,2%, 4:00, 6:00, 13:00, 14:00, 15:00 con lo 0,2%, invece nella categoria “Altro” rientrano le seguenti risposte: “1000” con l’1,3%, “1900”, “15,4” “38”, “16°” con lo 0,2%.


A che ora è stata registrata la temperatura di 16°?

Risposta: 16°

Nel seguente protocollo lo studente interpreta in modo scorretto la richiesta della domanda, considerando la temperatura alle ore 16 (19°). Inoltre riporta una misura sbagliata (15,4), probabilmente valutando il valore delle tacche dopo il 15 pari a 0,1 ciascuna.

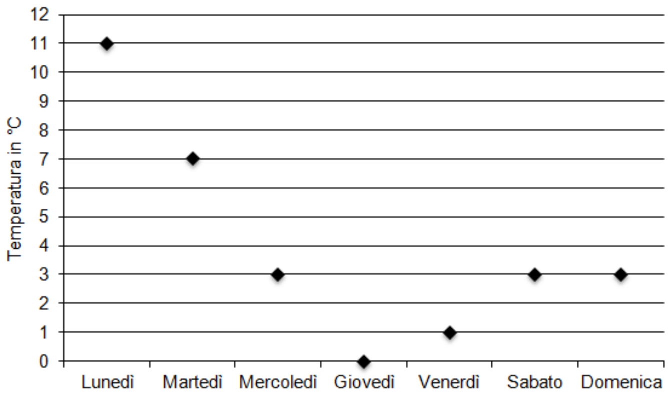

A che ora è stata registrata la temperatura di 16°?

Risposta: La temperatura di 16° e 15,4

Anche in questi quesiti si registra dunque una difficoltà nell’analizzare congiuntamente la richiesta del testo con le informazioni da estrapolare nel grafico. Carpenter e Shah (1998) hanno mostrato come anche allievi di livelli scolastici superiori spendano la maggior parte del tempo ad analizzare le informazioni solo in particolari regioni limitate del grafico e di non essere in grado di tenere traccia delle informazioni presenti nel complesso.

7.4. Interpretazione di grafici

F19) Il seguente grafico riporta la temperatura registrata in giorni diversi in una città in Svizzera.



Qual è stato il giorno più freddo?

Risposta: ………………………………………………………………..

Risposta corretta:
Giovedì

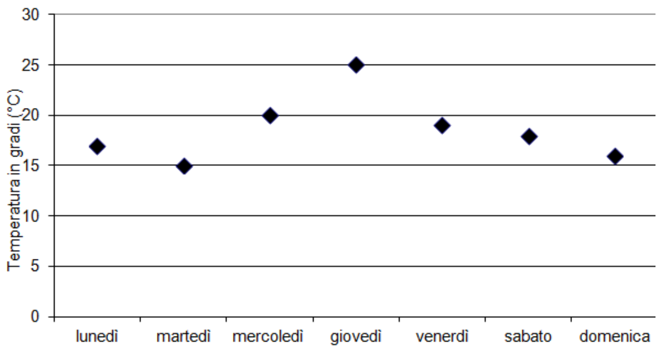
Risultati:

Risposta corretta	Risposte errate			Mancante/ Non valida
Giovedì	**Lunedì**	**Venerdì**	**Domenica**	
92,4	6,0	0,2	0,2	1,2

Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2º ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

F20) Ecco le temperature rilevate durante una settimana in una località del Ticino a mezzogiorno.



Tra il giorno più freddo e quello più caldo ci sono…

a) 5 gradi di differenza
b) 10 gradi di differenza
c) 15 gradi di differenza
d) 20 gradi di differenza

Risposta corretta: b

Risultati:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
8,5	77,8	5,5	4,7	3,5

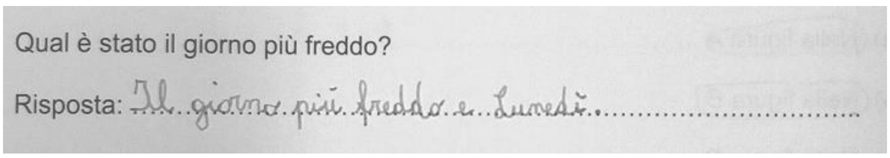
Programmi '84:
Problemi
Problemi di classificazione e di relazione (utilizzando, quando è opportuno, diagrammi, schemi, tabelle, grafici) con applicazioni ai vari campi del programma.

Nuovo piani di studio della scuola dell'obbligo (2° ciclo):
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Sapere, riconoscere e descrivere
L'allievo riconosce vari tipi di rappresentazione grafica di una relazione (tabella di valori, diagramma sagittale, istogramma, diagramma cartesiano, …).
Ambito: Numeri e calcolo – Aspetto di competenza: Eseguire e applicare
L'allievo è in grado di ricavare informazioni da rappresentazioni grafiche relative a situazioni conosciute.

I due ultimi quesiti mostrano essenzialmente la stessa tipologia di grafico e la medesima situazione problematica. Ciò che li differenzia è la tipologia di domanda (una a risposta aperta univoca e una a risposta chiusa) e le abilità richieste: nel primo si richiede una semplice lettura del grafico, individuando qual è il giorno più freddo, mentre la risoluzione del secondo necessita una certa capacità di elaborazione delle informazioni (individuare sia il giorno più caldo che il giorno più freddo e operare una sottrazione tra i due valori).

Al primo quesito risponde correttamente il 92,4% degli allievi. Tra coloro che sbagliano, il 6% risponde con la giornata più calda, invece della più fredda, manifestando la solita carenza di comprensione e interpretazione della domanda, mentre le altre risposte scorrette si distribuiscono in modo più o meno uniforme tra le altre tipologie di risposte.

Si riporta un protocollo a mo' di esempio:



L'allievo in questo caso probabilmente si sofferma sulla parola "più", senza prestare attenzione alla richiesta del quesito, in ogni caso non riesce ad individuare correttamente il giorno più freddo. In Lowrie, Diezmann e Logan (2011) viene condotto uno studio su come gli elementi di tipo percettivo evidenziati in un grafico influenzino le risposte degli allievi e il senso che danno alla domanda posta. Nel nostro caso il richiedere ripetutamente agli alunni di individuare la barra o il punto più alto comporta il formarsi di un automatismo secondo il quale le informazioni fornite dal grafico e dal testo vengono trascurate. Questo quesito infatti richiede una forte connessione tra la natura del grafico e le informazioni fornite dal testo. Tipicamente gli allievi prestano poca attenzione al testo scritto in un quesito, trovando solo parole chiave che possono indicare importanti informazioni legate al grafico. Questo può ostacolare l'interpretazione corretta della domanda e dunque condurre ad una risposta errata (Wiest, 2003).

Solo l'1,2% degli allievi non risponde alla domanda o fornisce una risposta da annullare.

Al secondo quesito risponde in modo corretto il 77,8% degli allievi. Tra coloro che sbagliano, l'8,5% risponde 5 gradi, invece di 10, il 5,5% risponde 15 gradi e il 4,7% risponde 20 gradi di differenza, non facendo quindi la differenza di temperatura tra il giorno più caldo e il giorno più freddo. Il 3,5% degli allievi fornisce una risposta mancante o da annullare.

8. Alcune considerazioni finali

Dopo aver analizzato in modo puntuale ciascun quesito somministrato, abbiamo pensato che potesse essere utile effettuare una valutazione criteriale impostata seguendo la logica di individuare alcuni argomenti matematici caratterizzanti gli items somministrati e di vederli in modo trasversale in ciascuno dei 120 quesiti, per valutare se venivano mobilitate dagli allievi le competenze necessarie.

Se ci si pone in ottica HarmoS e si desidera quindi sapere se gli allievi hanno acquisito determinate conoscenze, abilità o competenze più articolate, si tratta non solo di poter conoscere in modo puntuale quale risorsa è acquisita e con quale sicurezza, ma anche di rilevare le riuscite globali di un certo nucleo fondante della disciplina su tutti i quesiti somministrati.

Ciò è avvenuto in questa successiva analisi, tenendo conto che diverse suddivisioni tematiche si ripresentavano in ambiti e aspetti di competenza diversi. Va considerato che tale somministrazione non era stata inizialmente pensata a questo scopo, quindi i quesiti costruiti risultano disomogenei come difficoltà e come numero rispetto ai diversi argomenti presentati, ma riteniamo che tale tipo di valutazione possa essere in ogni caso un primo passo nell'ottica di allontanarsi dalla valutazione di un singolo sapere, ma di vedere l'analisi in ottica di competenza. A questo scopo abbiamo effettuato una media delle percentuali di risposta corretta data ai quesiti inerenti un particolare oggetto matematico.

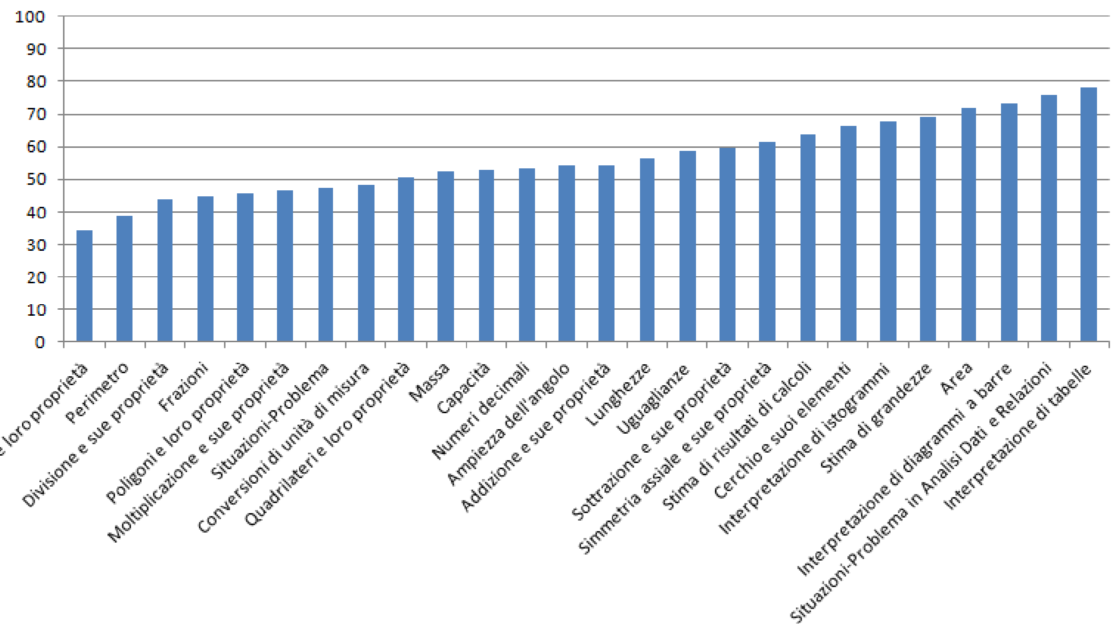
Da questa valutazione criteriale delle prove standardizzate di IV elementare possiamo formulare qualche considerazione su alcuni punti di forza e difficoltà degli allievi e proporre i conseguenti suggerimenti per l'azione didattica in classe.

Nella seguente tabella riportiamo gli argomenti matematici individuati, i quesiti collegati a tali argomenti e la media aritmetica delle percentuali di risposta corretta ottenuti dalla somministrazione. Gli argomenti sono stati distribuiti in ordine crescente da quelli che sono stati mobilitati con maggiore difficoltà a quelli che invece sono dominati con competenza dagli allievi di IV elementare.

Argomento	**Quesiti**	**Percentuale media di risposte corrette**
Triangoli e loro proprietà	A6, A7, A8, B5, B9	34,20%
Perimetro	B5, B6, B7, B8, B9	38,90%
Divisione e sue proprietà	B6, B7, B9, D13, D14, D15, D16, D18, E8, E9, E17, E18	43,70%
Frazioni	C2, C3, C4, C5, C14, C17	44,80%
Poligoni e loro proprietà	A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, B4, B5, B6, B7, B9	45,40%
Moltiplicazione e sue proprietà	B5, B8, B9, B14, C1, D6, D7, D8, D9, D10, D11, D12, D18, D20, E9, E12, E13, E14, E15, E16, E20	46,60%
Situazioni-Problema	B1, B2, B7, B9, B10, B11, B15, C2, C3, C13, C14, C20, D2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E13, E16, E18, E20	47,40%
Conversioni di unità di misura	C9, C10, C11, C12, C13, C14, C15, C16, C17, C18, C19, C20, E5	48,20%
Quadrilateri e loro proprietà	A10, A11, A12, A13, A14, B4, B6, B9	50,50%
Massa	C8, C15, C16, C17	52,60%
Capacità	C18, C19, C20	52,80%

Numeri decimali	C7, C9, C10, C11, C12, C15, C16, C18, C19, C20, D2, D3, D11, D12, D17, E1, E2, E3, E5, E11, E12, E13, E17, E18	53,20%
Ampiezza dell'angolo	A2, A3, A4, A5, B3, B4	54%
Addizione e sue proprietà	B5, B8, C12, C18, D1, D2, D3, D9, D10, D17, D20, E10, E11, E19, E20	54,30%
Lunghezze	B1, B2, B15, C3, C4, C6, C7, C9, C10, C11, C12, C13, C14	56,50%
Uguaglianze	D3, D10, D20, E19	58,50%
Sottrazione e sue proprietà	C3, C12, C14, C20, D4, D5, D19, E4, E5, E9, F10	59,70%
Simmetria assiale e sue proprietà	A17, A19, A20, B12, B16, B17, B18, B19, B20	61,40%
Stima di risultati di calcoli	D17, D18, D19	63,70%
Cerchio e suoi elementi	A15, A16, A17, B15	66,40%
Interpretazione di istogrammi	F16, F17, F18	67,60%
Stima di grandezze	A8, C6, C7, C8	69%
Area	B10, B11, B12, B13, B14, C5	71,80%
Interpretazione di diagrammi a barre	F10, F11, F12, F13, F14, F15	73%
Situazioni-problema in “Analisi dei dati e relazioni”	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10, F11, F12, F13, F14, F15, F16, F17, F18, F19, F20	75,70%
Interpretazione di tabelle	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9	78,30%

Di seguito riportiamo un grafico per visualizzare in modo ancor più immediato i risultati ottenuti disposti in ordine crescente.



In generale si notano diverse difficoltà da parte degli allievi a gestire quesiti che riguardano l'ambito geometrico, indipendentemente dagli aspetti di competenza rilevati. In particolare, per quanto riguarda le figure geometriche notiamo una differenza rilevante tra le risposte corrette scelte dagli allievi in quesiti riguardanti i triangoli, piuttosto che in quelli riguardanti i quadrilateri. Va osservato che molte difficoltà sono legate alla *distinzione linguistica* dipendente dalla lunghezza dei lati (isoscele, equilatero e scaleno) e in un quesito a quella dipendente dall'ampiezza degli angoli (acuto, ottuso e scaleno). Quest'ultima *difficoltà di nominalizzazione* è emersa anche nella distinzione dei diversi tipi di angoli. I risultati concernenti il riconoscimento di alcuni elementi caratterizzanti il cerchio e alcune loro caratteristiche dimostrano, invece, competenza da parte degli allievi (centro, diametro, assi di simmetria), così come la simmetria assiale e le sue proprietà, valutata tramite diversi quesiti.

Per quanto riguarda il perimetro di poligoni, osserviamo che gli allievi mostrano difficoltà sia in problemi diretti, sia soprattutto in problemi dove si richiede un ragionamento inverso o concatenato. Come emerge dal grafico, la differenza tra i risultati ottenuti in quesiti sul perimetro e sull'area è sostanziale, ma questo va imputato probabilmente alla tipologia di quesiti: quelli sul perimetro richiedono maggiore sforzo cognitivo o un sapere nozionistico (ragionamento inverso e concatenato, riconoscimento della tipologia del poligono), quelli concernenti l'area richiedono, invece, esclusivamente abilità legate al conteggio di quadretti e non il ricorso a formule o a ragionamenti inversi.

Anche per l'ampiezza dell'angolo, oggetto matematico assai complesso, si presentano difficoltà da parte di diversi allievi, alcune concettuali, altre dipendenti dalle distinzioni linguistiche e altre ancora dipendenti dalle rappresentazioni scelte per identificarli.

In generale, meritano particolare attenzione (e forniscono elementi per interventi sul percorso di insegnamento) le domande che coinvolgono un *cambiamento di rappresentazione semiotica*. L'analisi dei protocolli rileva che nei quesiti dove è necessario effettuare un trattamento o una conversione, gli allievi incontrano particolari difficoltà, si pensi al passaggio da un registro verbale o grafico ad uno aritmetico, o a quello da una rappresentazione a un'altra all'interno dello stesso registro semiotico. In quest'ottica diversi quesiti inerenti la conversione di unità di misura registrano risultati scadenti. L'allievo non ha ben afferrato il *senso dell'unità di misura,* tanto che nei quesiti di tutti gli ambiti di competenza dove si richiede un risultato numerico legato ad una grandezza particolare, gli allievi tendono ad omettere l'unità di misura o a sbagliarla inserendo non di rado unità di misura relative a grandezze diverse. Allo stesso modo, si rilevano difficoltà nell'affrontare *situazioni-problema* dove è necessaria una traduzione del testo linguistico in linguaggio aritmetico o nella stessa comprensione del testo del problema. Da questo punto di vista è importante didatticamente riflettere e intervenire con consapevolezza, essendo *l'apprendimento strategico* uno dei più importanti e caratterizzanti del pensiero matematico e più in generale una competenza fondamentale per il futuro cittadino.

Anche l'argomento frazione, intesa come parte/tutto o come operatore, da sempre oggetto di ostacolo per i bambini, risulta essere un punto debole. In molti quesiti, centrati anche su tematiche diverse, si richiede di calcolare la frazione di una certa quantità e dall'analisi dei protocolli osserviamo che le strategie di risoluzione utilizzate dai bambini nascondono spesso misconcezioni che l'insegnante dovrebbe prontamente riconoscere per far evolvere l'immagine erronea formatasi nell'allievo.

Per quanto riguarda le capacità di calcolo rileviamo che la divisione e la moltiplicazione inducono sovente in errore e soprattutto che gli allievi mostrano lacune nella conoscenza delle proprietà delle operazioni e nella loro applicazione in situazioni dove semplificherebbero notevolmente il calcolo ed eviterebbero di "cadere" in errori. Occorre quindi lavorare su convinzioni e atteggiamenti degli allievi nei confronti della matematica e su competenze trasversali che possono indurre comportamenti e strategie vincenti nell'affrontare questa disciplina e non solo. Va anche osservata l'incapacità di molti allievi a gestire il calcolo mentale, prediligendo un'abitudine a effettuare il procedimento algoritmico scritto in colonna anche quando non sarebbe necessario; procedimento che del resto è ritenuto dagli allievi molto rassicurante se consentito dal docente. Nella gestione dell'addizione e della sottrazione emergono discrete competenze da parte degli allievi, anche se va sottolineato che in presenza di numeri decimali le capacità degli allievi subiscono un notevole calo.

Emergono discrete competenze degli allievi anche nello stimare calcoli e nel gestire quesiti che coinvolgono lunghezze e uguaglianze.

Inoltre, gli allievi mostrano buone capacità di stimare grandezze legate alla vita quotidiana e nell'interpretazione di situazioni-problema in cui è richiesto di ricavare informazioni da tabelle, grafici, diagrammi a barre e istogrammi.

Dai pochi quesiti a risposta aperta articolata abbiamo inoltre osservato *difficoltà argomentativa e giustificativa* negli allievi, dovuta probabilmente alla scarsa abitudine a rispondere a sollecitazioni di questo tipo. Appare molto importante che entri nella prassi didattica la consuetudine a riflettere sulle attività che si fanno, in modo da poter esprimere verbalmente osservazioni e considerazioni, spiegazioni di procedure e ragionamenti. Per poter abituare gli alunni a riuscire sempre meglio nella verbalizzazione è opportuno che questa venga sollecitata a partire dall'inizio del percorso scolastico, in modo sia individuale che collettivo. Con la discussione in classe ad esempio, si può richiedere di spiegare le proprie convinzioni e i procedimenti trovati interagendo con i compagni. L'interazione è fondamentale perché si affini la modalità di spiegare a parole; infatti la necessità di convincere altri che il proprio procedimento è corretto riesce a rendere sempre più esplicito il pensiero e sempre più precisa la verbalizzazione.

Tutte queste indicazioni, e le altre che ogni insegnante può ricavare confrontando i risultati dei propri allievi con quelli del campione e analizzando i protocolli della propria classe, sono elementi che possono servire a migliorare, da un lato, la conoscenza del proprio insegnamento (stile, caratteristiche, punti di forza e di debolezza) e, dall'altro, la comprensione delle caratteristiche dell'apprendimento dei propri allievi. I quesiti presentati possono risultare divergenti rispetto alle abitudini degli allievi e far emergere difficoltà forse dipendenti da abitudini didattiche in cui sono presenti elementi di ripetitività e schematismo che occorre superare. Nell'analisi sopra riportata si è evidenziato come diversi problemi siano di ordine cognitivo (procedure mentali) non specificamente matematici (trasversali alle materie di insegnamento e presenti in tutte le materie), ma che se non sono padroneggiati creano problemi nella risoluzione di situazioni matematiche.

Dunque le prove possono offrire la possibilità di "entrare dentro i risultati", di far emergere i punti di criticità o le risorse in atto, di permettere spazi di autonomia e di confronto consapevole, di tracciare suggestioni e spunti operativi per migliorare i processi di insegnamento/apprendimento della matematica.

Bibliografia

Alajmi, A.H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views, *Journal of Mathematics Teacher Education,* 12, 263-283.

Alajmi, A.H., & Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 117-139.

Arrigo, G. (2000). Il calcolo a scuola: l'inizio di un cambiamento. *Atti del Convegno nazionale: Matematica nel 2000*. Ortona: Mathesis.

Arrigo, G. (2011). Sperimentazione sul calcolo numerico: calcolo in riga vs calcolo in colonna, *Bollettino dei docenti di Matematica*, Bellinzona, Svizzera, 62, 59-69.

Arrigo, G. (2014). Calcolo mentale-approssimato-strumentale, *Bollettino dei docenti di matematica,* Bellinzona, Svizzera, 68, 53-62.

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi*. *Riscopriamo la geometria*. Roma: Carocci.

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2008). Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione, *La matematica e la sua didattica*, 4, 479-520.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2010). *Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico.* Trento: Erickson.

Bagni, G.T., & D'Amore, B. (1992). La classificazione dei quadrilateri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 15, 8, 785-814.

Baldazzi, L., Liverani, G., Magalotti, F., Monaco, A., Prosdocimi, L., & Vecchi, N. (2011). *Numeri*. Con Appendice di Gianfranco Arrigo. Bologna: Pitagora.

Bartolini Bussi, M.G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 18 A, 221-256.

Bolondi, G. (2010). *Le prove Invalsi di matematica nella scuola primaria. Commento risultati prove 2009.* Firenze: Giunti Scuola.

Bolondi, G. (2011). Dalla valutazione all'intervento didattico e formativo. PQM 2010/2011 http://pqm.indire.it/php/index.php?id_cnt=9001&read=11139 [10 maggio 2014].

Bonotto, C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 5, 415-448.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignements des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques,* 1, 1, 11-59.

Brousseau, G. (1981). Problémes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques,* 2, 3, 37-127.

Brousseau, G. (1983). Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathèmatiques. Thèse de Doctorat d'État. Université de Bordeaux I.

Brown, J.S., & Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, *Cognitive science*, 2(2), 155-192.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A.M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura?, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 25, 3, 255-270.

Campolucci, L., Maori, D., & Fandiño Pinilla, M.I. (2011). *Frazioni*. Bologna: Pitagora.

Campolucci, L., Maori, D., Fandiño Pinilla, M.I., & Sbaragli, S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni, *La matematica e la sua didattica*, 3, 353-400.

Carpenter, P.A., & Shah, P. (1998). A model of the perceptual and conceptual processes in graph comprehension, *Journal of Experimental Psychology: Applied, 4*, 75-100.

Cazzago, P. (1984). *Psicomotricità e spazio – tempo, strutture e ritmi.* Brescia: La Scuola.

Cedrini, M.P., & Liberati, F. (2005). La misura del tempo, *La vita scolastica,* Dossier, 3, 20-23.

Chamorro, M.C. (1997). Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental. *Tesi di dottorato*, UNED.

Chamorro, M.C. (2001-02). Le difficoltà nell'insegnamento – apprendimento delle grandezze nella scuola di base, *La matematica e la sua didattica*, I parte: 4, 2001, 332-351; II parte: 1, 2002, 58-77.

CIRSE (2014). *Prove standardizzate di Matematica per la SE*. Locarno: Centro Innovazione e Ricerca sui Sistemi Educativi.

Clanché, P. (1994). L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein. In: Hannoun, H., & Drouin-Hans, A.-M. (eds.). *Pour une philosophie de l'éducation*, CRDP de Bourgogne, 223-232.

Competenze fondamentali per la matematica. Standard nazionali di formazione. Approvati dall'assemblea plenaria della CDPE del 16 giugno 2011. Disponibile in: http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf [25 maggio 2014].

Cottino, L., & Sbaragli, S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo*. Roma: Carocci.

Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011). *Geometria*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. P. 273.

Cottino, L., Dal Corso, E., Francini, M., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011). *Misura*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. P. 356.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica, *La matematica e la sua didattica,* 2, 150-173.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici, *La matematica e la sua didattica*, 4, 557-583.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index. (Disponibile anche in ebook).

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2005). Area e perimetro. Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti, *La matematica e la sua didattica*, 2, 165-190.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Trento: Erickson.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali, *Bollettino dei docenti di matematica*, Bellinzona, Svizzera, 66, 43-52.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo, *La matematica e la sua didattica,* 22, 3, 285-329.

D'Amore, B., & Sandri, P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante, *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione", *La matematica e la sua didattica,* 2, 139-163.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. P. 116.

Domenici, G. (2007). *Manuale della valutazione scolastica*. Roma: Editori Laterza.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 6, 139-163.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, 5-53.

Duval, R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero matematico, *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.

Éduscol (2007). *Documents d'application des programmes, Mathématiques cycle 3.* Edito dal Ministero dell'educazione nazionale francese. Scaricabile da http://www.cndp.fr/ecole/. [10 maggio 2014].

Eurydice (2009). Les évaluations standardisées des élèves en Europe: objectifs, organisation et utilisa-tion des résultats. Disponibile in: http://www.education.gouv.fr/archives/2012/refondonslecole/wp-content/uploads/2012/07/eurydice_les_evaluations_standardisees_des_eleves_en_europe_2009.pdf [20 febbraio 2013].

Fandiño Pinilla, M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M.I. (2005a). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M.I. (2005b). Una riflessione sulla valutazione in Matematica a partire dalle prove INValSI. In: AA.VV. *Le prove INValSI e la valutazione in matematica*. Disponibile in: www.istruzioneferrara.it/documentinew/valermath.pdf [10 maggio 2014].

Fandiño Pinilla, M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica.* Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla, M.I., & D'Amore, B. (2006). *Area e perimetro*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla, M.I., & Sbaragli, S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. P. 183.

Ferrari, P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Il battente. Bologna: Pitagora.

Fischbein, E. (1981). Concreto ed astratto nell'insegnamento della matematica elementare. In: Prodi, G. (ed.). *Processi cognitivi ed apprendimento della matematica nella scuola elementare.* Brescia: La scuola.

Fischbein, E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi, L. (Ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.

Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi, L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein, E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora. 25-38.

Fischbein, E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica, *La matematica e la sua didattica,* 4, 365-401.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of mathematical statement?, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 491-512.

Foresti, I, & Sangiorgi, M.I. (2011). *Trasformazioni geometriche*. Trento: Erickson.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In: D'Amore, B., & Sbaragli, S. (eds.). *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula.* Bologna: Pitagora. 33-38.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (in corso di stampa). *Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici.* Atti del convegno Giscel, Roma, 26-29 marzo 2014.

Gallo, E., Amoretti, C., & Testa, C. (1989). Sul ruolo dei modelli nella risoluzione di problemi di geometria: controllo ascendente e discendente, *Quaderni di ricerche in didattica della matematica*, 7, Torino.

Giménez Rodríguez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas.* Madrid: Editorial Sintesis.

Hittleman, D.R. (1985). A picture is worth a thousand words…if you know the words, *Childhood Education, 61-62*, 32-36.

Hunting, R.P., & Davis, G. (1991). *Recent research in psychology: early fraction learning.* New York: Springer – Verlag.

Iacomella, A., & Marchini, C. (1990). Riflessioni sul problema della misura, *Periodico di matematiche*, 66, VI, 4, 28-52.

Kamii, C., & Clark, F.B. (1995). Equivalent fractions: their difficulty and educational implications, *Journal oh mathematical behavior,* 14, 365-378.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In: Coxford, A.F. (ed.) (1988). *The ideas of algebras*, Yearbook 1988, K-12. Reston: NCTM.

Lowrie, T., & Diezmann, C.M. (2009). National numeracy tests: A graphic tells a thousand words, *Australian Journal of Education,* 53(2), 141-158.

Lowrie, T., Diezmann, C.M., & Logan, T. (2011). Understanding graphicacy: Students' making sense of graphics in mathematics assessment tasks, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* Retrieved January 12, 2012 from. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm [10 maggio 2014].

Maier, H. (1998). L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria", *La matematica e la sua didattica,* 3, 271-290.

Marazzani, I. (2010). *Angolo. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Marazzani, I. (2011). *Una raccolta ragionata di problemi.* Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. P. 106.

Marchini, C. (1999). Il problema dell'area, *L'educazione matematica*, 1, 1, 27-48.

Mariotti, M.A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria.* Bologna: Pitagora.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid. P. 143.

McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense, *For the Learning of Mathematics,* 12 (3), 2-8.

Mitchelmore, M.C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation, *Educational studies in mathematics*, 41, 209-238.

Mons, N. (2009). Les effets théoriques et réels de l'évaluation standardisée. Disponibile in: http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/111FR.pdf [15 febbraio 2013].

Outhred, L., & Mitchelmore, M. (1992). *Representation of area: a pictorial perspective*. XVI PME. 2, 194-201.

Pellegrino, C. (1999). Stima e senso del numero. In: Jannamorelli, B., & Strizzi, A. (eds.). *Allievo, insegnante, sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica.* Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona (Aq), 23-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita. 145-147.

Pianigiani, O. (2002). *Vocabolario etimologico della Lingua Italiana*. Firenze: Ariani.

Reys, B.J. (1986). Teaching computational estimation: concepts and strategies. In: Schoen, H.L. & Zweng, M.J. (Eds.). *Estimation and mental computation computation: 1986 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 31-44.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D.C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States, *School Science and Mathematics,* 99 (2), 61-70.

Sandri, P. (1996). Per una didattica del tempo convenzionale. In: Caredda, C., Piochi, B., & Vighi, P. (eds.). *Lo spazio e il tempo: esperienza e apprendimento*. Atti del Convegno Nazionale "Matematica & Difficoltà", 23-25 febbraio 1996, Castel S.Pietro Terme (Bo). Bologna: Pitagora.

Sandri, P. (2002). Alcune riflessioni sulle difficoltà di orientamento e di calcolo del tempo. In Contardi, A., & Piochi, B. (eds.). *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica. Metodologia e pratica di insegnamento.* Trento: Erickson. pp.171-177.

Sandri, P. (2008). *La didattica del tempo convenzionale. Riflessioni e percorsi per la scuola dell'infanzia e la scuola primaria.* Milano: FrancoAngeli (seconda edizione). pp.187.

Sbaragli, S. (2008a). L'angolo che problema, *La Vita scolastica*, 16, 13-15.

Sbaragli, S. (2008b). Le convinzioni di allievi di 5 anni sull'idea di "metà". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* prima parte: 31A, 1, 33-51; seconda parte: 31A, 2, 109-128.

Sbaragli, S. (2009a). Orizzontale, verticale e obliquo, *La vita scolastica*, 4, 15-17.

Sbaragli, S. (2009b). Le insidie della divisione, *La vita scolastica*, 14, 18-19.

Sbaragli, S. (2011). Introduzione. In: Cottino, L., Dal Corso, E., Francini, M., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011). *Misura.* Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. 1-24.

Sbaragli, S. (2012). Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica. In: Bolondi B., & Fandiño Pinilla M.I. (2012). *I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica.* Napoli: Edises. 121-139.

Sbaragli, S., Arrigo, G., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Frapolli, A., Frigerio, D., & Villa, O. (2011). Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers' beliefs on the conceptual education of students, *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 10, 1, 61-102.

Sbaragli, S., & Mammarella, I.C. (2010). L'apprendimento della geometria. In: Lucangeli D., & Mammarella I.C. (eds.). *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento.* Milano: Franco Angeli, 107-135.

Sbaragli, S., & Santi, G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo, *Bollettino dei docenti di matematica*, 65, 35-55.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Segovia, I., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en calculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Sowder, L. (1989). Affect in the Solution of Story Problems. In: McLeod, D., & Adams, V. (eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective.* New York: Springer Verlag.

Speranza, F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. In: D'Amore, B. (ed.). *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora. 105-114.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?.* Trento: Erickson, 44-45.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto, *Relime,* 7, 3. 235-256.

Vergani, A. (2002). *La valutazione esterna delle istituzioni scolastiche e formative: alcune considerazioni introduttive*. AIV- Associazione Italiana di Valutazione.

Wiest, L.R. (2003). Comprehension of mathematical texts, *Philosophy of mathematics education Journal,* 17. http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome17/pdf/lwiest.pdf [maggio 2014].

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

Zan, R. (2002). *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica*. Materiale del Seminario Nazionale.

Zan, R. (2007a). *Difficoltà in matematica, Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.

Zan, R. (2007b). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 30, A-B, 6, 741- 762.

Zan, R. (2011a). *L'errore in matematica: alcune riflessioni.* PQM 2010/2011 Disponibile in: http://pqm.indire.it/php/index.php?id_cnt=9001&read=11139 [10 maggio 2014].

Zan, R. (2011b). The crucial role of narrative thought in understanding story problems. In: Kislenko, K. (ed.) *Current state of research on mathematical beliefs XVI.* Proceedings of the MAVI-16 Conference. Tallinn: Institute of Mathematics and Natura Sciences, Tallinn University. 331-348.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, I parte: 35 A, 2, pp. 107-126; II parte: 35 A, 5, pp. 437-467.

www.supsi.ch/dfa